

# Fondements de l'informatique: Examen

## Durée: 3h

*Sujet proposé par Olivier Bournez*

*Version 6*

*(corrigé)*

*L'énoncé comporte 3 parties (sections), certaines avec des sous-parties (sous-sections), chacune indépendante, qui pourront être traitées dans un ordre quelconque. En revanche, dans chaque partie, il peut être utile, dans la réponse à une question, d'utiliser les questions précédentes! On pourra librement admettre le résultat d'une question pour passer aux questions suivantes. La difficulté des questions n'est pas une fonction linéaire ni croissante de leur numérotation.*

*On pourra utiliser les résultats et théorèmes démontrés en cours sans chercher à les redémontrer.*

*Dans tout l'énoncé, et en particulier dans la partie "Machines de Turing", on demande des algorithmes et des solutions à un haut niveau : dans aucune des questions il n'est demandé de décrire complètement une machine de Turing, ni même d'en donner une description graphique ; on pourra se contenter pour décrire un algorithme de le décrire par exemple en français ou dans un langage de programmation classique comme JAVA, C ou CAML.*

## 1 Machines de Turing

**Question 1.** *Parmi les problèmes suivants, lesquels sont décidables, récursivement énumérables ou non-récursivement énumérable? Justifier votre réponse.*

- 1. Déterminer si le langage accepté par une machine de Turing  $M$  contient au moins trois mots.*
- 2. Déterminer si une machine de Turing  $M$  vérifie la propriété suivante : partant d'un ruban contenant uniquement le symbole de blanc elle écrira à un certain moment au moins une fois un symbole non-blanc sur son ruban.*

*Solution :* La question 1. n'est pas décidable : il s'agit d'une application directe du théorème de Rice. Le problème est récursivement énumérable car étant donnée une machine  $M$ , on peut générer une à une toutes les triplets de mots  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  et tous les entiers  $t$ , et tester pour chaque triplet  $(w_1, w_2, w_3, t)$  si  $M$  accepte  $w_1$  et  $w_2$  et  $w_3$  en moins de  $t$  étapes. Si oui, on termine, sinon, on continue à jamais.

La question 2. est décidable : si  $M$  possède  $q$  états, il suffit de simuler  $M$  sur au plus  $q + 1$  étapes : en au plus  $q + 1$  étapes elle repassera dans un même état. Si avant de repasser par le même état elle n'a pas écrit autre chose qu'un blanc, elle bouclera à jamais et ne le fera jamais. Sinon, c'est qu'elle a écrit un autre caractère qu'un blanc, et on connaît la réponse.  $\square$

## 2 NP-complétude : Problème $k$ -COULEURS

On s'intéresse à la famille de problèmes de décision  $k$ -COULEURS où  $k \geq 3$  est un entier. Pour chaque entier  $k$ , le problème  $k$ -COULEURS est le suivant :

- **Donnée:** Un graphe  $G = (V, E)$ .
- **Réponse:** Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant **exactement**  $k$  couleurs.

(On pourra utiliser les constructions du cours dans chacune des questions).

**Question 2.** Soit  $k \geq 3$  un entier. Justifier que  $k$ -COULEURS est dans NP.

*Solution :* Le problème  $k$ -COULEURS est dans NP, car la donnée des sommets colorés par chacune des  $k$  couleurs constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.  $\square$

**Question 3.** Justifier pourquoi la preuve vue en cours de la NP-complétude de 3-COLORABILITE (étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant **au plus** 3-couleurs) permet d'affirmer la NP-complétude de 3-COULEURS.

*Solution :* Il suffit de remarquer que le graphe construit dans le cours (pour prouver que le problème 3-COLORABILITE est NP-complet) est coloriable avec moins de 3 couleurs si et seulement si il est coloriable avec 3 couleurs : en raison des triangles dans chacun des gadgets, il ne peut pas être coloré avec 1 ou 2 couleurs.  $\square$

**Question 4.** Soit  $k > 3$ . Prouver la NP-complétude de  $k$ -COULEURS.

*Solution :* On va réduire 3-COULEURS à  $k$ -COULEURS.

On se donne donc un graphe  $G = (V, E)$ . Nous allons construire un graphe  $G' = (V', E')$  de la façon suivante.  $G'$  est une copie de  $G$  en ajoutant un graphe complet de taille  $k - 3$ . De plus, chaque sommet de cette clique est voisin de tous les sommets de  $G$ .

Si l'on préfère, plus formellement

- $V' = V \cup \{v_1, \dots, v_{k-3}\}$  (nous ajoutons  $k - 3$  sommets disjoints) ;
- $E' = E \cup \{(v, v_i) : v \in V, 1 \leq i \leq k - 3\} \cup \{(v_i, v_j) : 1 \leq i < j \leq k - 3\}$

Le graphe  $G'$  peut se construire en temps polynomial.

Supposons que  $G$  peut se colorier avec 3 couleurs. Soit  $C$  un tel coloriage. Le graphe  $G'$  peut se colorer en  $k$  couleurs : le sous-graphe de  $G'$  correspondant au graphe  $G$  se colorie en utilisant  $C$ . Il reste les sommets de la clique. On les colorie utilisant les couleurs de 4 à  $k$

Supposons que  $G'$  peut se colorer en  $k$  couleurs. Soit  $C$  un tel coloriage. Chaque sommet de la clique utilise une couleur. Aucun autre sommet utilise cette couleur. Cela implique que le coloriage  $C$  dans  $G$  utilise 3 couleurs.  $\square$

## 3 Pavages de Wang

Cette partie est constituée d'exercices indépendants à propos du problème des tuiles de Wang.

On fixe un domaine  $R$  : dans toute la suite,  $R$  sera essentiellement soit le plan, soit un rectangle borné du plan à dimensions entières.

On se donne un ensemble fini  $\tau$  de *tuiles de Wang* : chaque *tuile de Wang* est un carré dont chaque côté est coloré ; toutes les tuiles sont de mêmes dimensions de côté 1 ; les tuiles sont distinctes deux-à-deux. On cherche à déterminer si l'on peut complètement couvrir le domaine  $R$  avec ces tuiles de telle sorte que deux carrés adjacents aient leurs côtés en contact de la même couleur. On s'autorise à utiliser chaque tuile un nombre arbitraire de fois. Par contre, on ne s'autorise pas à tourner les tuiles<sup>1</sup>.

Si cela est plus clair, plus formellement :

---

1. Pas de rotation, ni de retournement. Autrement dit, le haut et la droite d'une tuile doivent rester en haut et à droite.

- une *tuile de Wang* peut se voir comme un quadruplet  $(d, h, g, b)$ , avec  $d, h, g, b \in \mathcal{C}$  : l'ensemble  $\mathcal{C}$  représente l'ensemble fini des couleurs possibles, et  $d, h, g, b$  représentent respectivement la couleur du côté droit, haut, gauche et bas respectivement du carré.
- Etant donné un ensemble  $\tau$  de tuiles de Wang, un pavage par  $\tau$  d'un domaine  $R \subset \mathbb{Z}^2$  associe à chaque élément de  $R \subset \mathbb{Z}^2$  une tuile de  $\tau$  avec les contraintes suivantes :
  - une tuile  $A$  ne peut être placée à la droite d'une autre tuile  $B$  que si la couleur de droite de la tuile  $B$  est égale à la couleur de gauche de la tuile  $A$  ;
  - une tuile  $A$  ne peut être placée en bas d'une autre tuile  $B$  que si la couleur du bas de la tuile  $B$  est égale à la couleur du haut de la tuile  $A$  ;

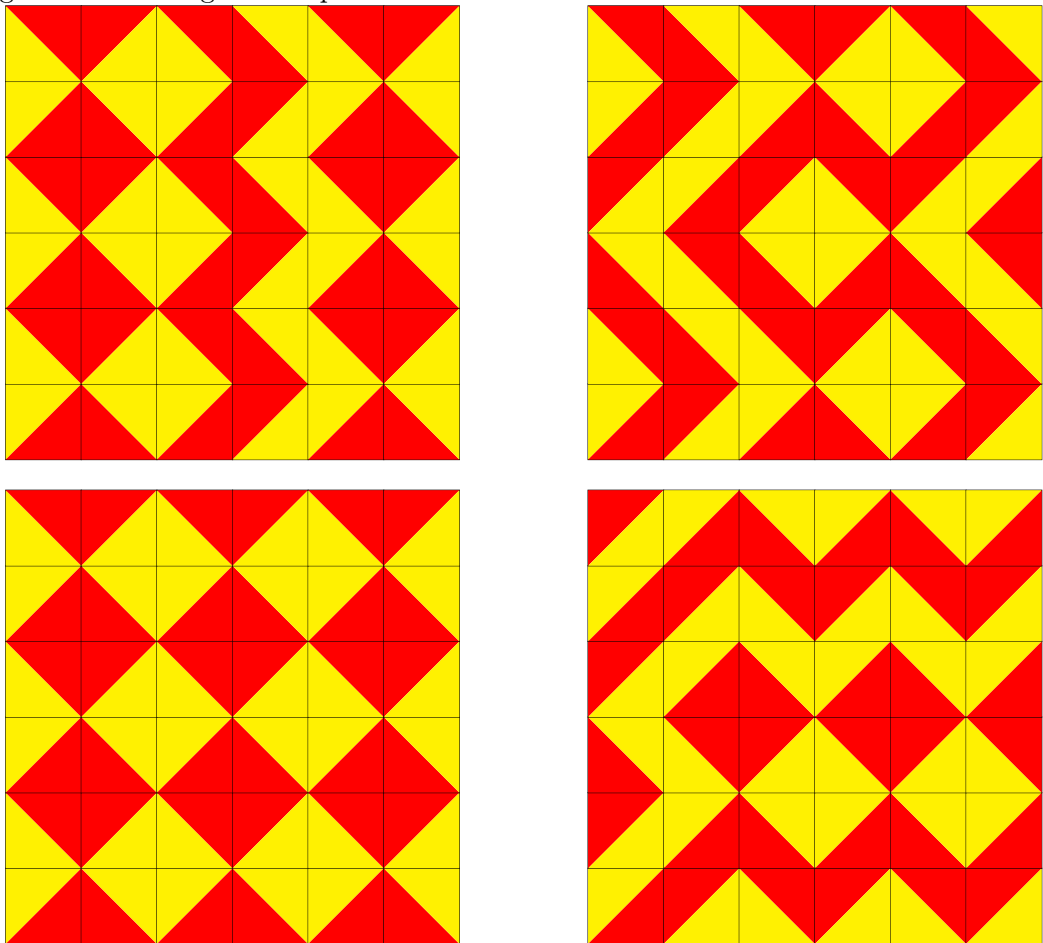
S'il est possible de paver le domaine  $R$  par l'ensemble de tuiles  $\tau$ , on dit que  $R$  est *pavable par  $\tau$* .

Dans le cas où le domaine  $R$  est borné, une des couleurs de  $\mathcal{C}$  est appelée *couleur blanche*. On parlera de *pavage à bords blancs* si on impose en plus que si une tuile  $A$  touche l'un des bords de  $R$ , alors le(s) bord(s) de  $A$  qui touche(nt)  $R$  doivent être de couleur blanche.

**Exemple :** On considère les 4 tuiles suivantes :



Voici 4 pavages du rectangle<sup>2</sup> (carré)  $6 \times 6$ . Observons que ce sont 4 pavages parmi les  $4096 = 2^6 \times 2^6$  pavages de ce rectangle  $6 \times 6$  par ces tuiles.




---

2. Ce ne sont pas des pavages à bords blancs, car les bords du rectangle ne sont pas de couleur uniforme. Remarque : Il n'y a pas de pavage à bord blanc avec ce jeu de tuiles car aucune tuile ne saurait être placée dans un coin du rectangle (un pavage à bord blanc imposerait que les 4 côtés du rectangle  $6 \times 6$  soient de la même couleur). Remarque : le troisième pavage (page suivante) a ses côtés opposés de la même couleur, mais pas tous ses côtés de la même couleur.

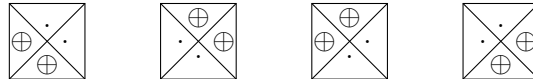
**Parenthèse (non-indispensable, au cas où cela aide) :** Si l'on préfère encore, c'est essentiellement une formalisation du concept de *puzzle* avec lequel les enfants jouent, en identifiant couleurs à formes complémentaires. Par rapport au jeu usuel des enfants, on s'autorise à utiliser plusieurs fois une pièce du puzzle si besoin.

On va se limiter dans ce sujet essentiellement soit au cas où le domaine  $R$  à paver est un rectangle borné à dimensions entières, soit au cas où le domaine  $R$  à paver est le plan  $\mathbb{Z}^2$  tout entier.

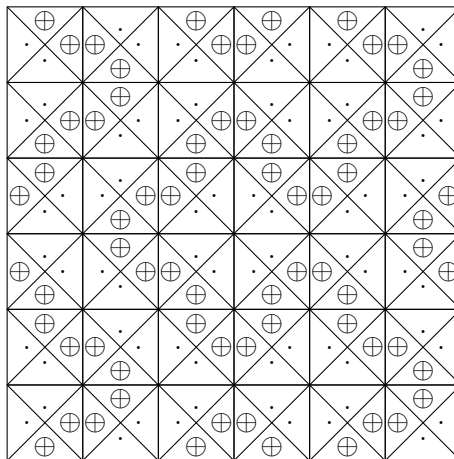
**Convention graphique :** Pour des raisons de lisibilité, plutôt que d'utiliser des couleurs dans les dessins de cet énoncé, on utilisera parfois des symboles représentant des couleurs. La tuile  $(d, h, g, b)$  dont les côtés droit, haut, gauche et bas sont respectivement  $d, h, g, b$  sera représentée graphiquement comme suit :



**Exemple :** Si l'on prend  $\cdot$  et  $\oplus$  comme symboles de couleurs, on peut représenter graphiquement les tuiles de l'exemple précédent par :



Le deuxième pavage de la page précédente peut alors aussi se décrire graphiquement comme :



### 3.1 Des pavages à la logique

On cherche dans cette sous-section (indépendante de la suite) à relier la question de l'existence d'un pavage à celle de l'existence d'un modèle d'une certaine théorie logique. On veut formaliser le cas du pavage du plan  $\mathbb{Z}^2$ .

**Question 5.** On considère un langage constitué de 4 symboles de fonctions unaires  $e, n, w, s$  (moyen mnémotechnique :  $e, n, w, s$  pour est, nord, ouest, sud) avec les axiomes suivants en plus des axiomes de l'égalité :

$$\forall x \quad n(s(x)) = x \quad (1)$$

$$\forall x \quad s(n(x)) = x \quad (2)$$

$$\forall x \quad w(e(x)) = x \quad (3)$$

$$\forall x \quad e(w(x)) = x \quad (4)$$

$$\forall x \quad e(n(x)) = n(e(x)) \quad (5)$$

$$\forall x \quad e(s(x)) = s(e(x)) \quad (6)$$

$$\forall x \quad w(n(x)) = n(w(x)) \quad (7)$$

$$\forall x \quad w(s(x)) = s(w(x)) \quad (8)$$

Appelons  $E_0$  l'ensemble des axiomes obtenus<sup>3</sup>.

Le plan  $\mathbb{Z}^2$  est un modèle de ces axiomes  $E_0$  : l'idée est d'interpréter  $w(x)$  comme le voisin gauche de la cellule  $x$  (et de façon similaire pour  $e, n, s$  avec voisin droit, haut, bas respectivement).

Expliquer pourquoi on peut avoir envie d'ajouter l'axiome  $\forall x \neg e(e(x)) = x$ , et même avoir envie d'ajouter toute une famille d'axiomes.

On notera  $E_1$  l'ensemble des axiomes obtenus.

*Solution* : Avec les axiomes précédents, on tente d'axiomatiser  $\mathbb{Z}^2$ , mais on a aussi des modèles autres que  $\mathbb{Z}^2$  comme des modèles périodiques comme  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  ou des modèles cylindriques comme  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . On peut avoir envie d'ajouter pour tout entier  $i$  et  $j$  l'axiome  $\forall x e^i(n^j(x)) \neq x$  où  $e^i$  (respectivement :  $n^j$ ) désigne  $e(e(\dots))$  avec  $e$  (resp.  $n(n(\dots))$  avec  $n$ ) répété  $i$  fois.  $\square$

**Question 6.** Les axiomes  $E_0$  comme  $E_1$  ne permettent pas de garantir des modèles connexes : on dira qu'un modèle est connexe si pour deux éléments  $x$  et  $y$  du domaine,  $x$  et  $y$  peuvent être connectés par les fonctions  $e, w, n, s$  (c'est-à-dire qu'une certaine composition d'applications de ces fonctions envoie l'un sur l'autre).

Décrire un modèle non-connexe des axiomes  $E_1$  proposés dans la question précédente.

*Solution* : Prendre par exemple deux copies disjointes de  $\mathbb{Z}^2$ .  $\square$

Ce phénomène est en fait inévitable :

**Question 7.** Prouver que tout ensemble d'axiomes qui étend les axiomes  $E_0$ , qui possède le plan  $\mathbb{Z}^2$  comme modèle, possède aussi des modèles non-connexes comme modèle (on pourra utiliser le théorème de compacité).

*Solution* : Considérons une théorie  $T$  qui possède  $\mathbb{Z}^2$  comme modèle. Ajoutons deux constantes  $c$  et  $d$  et la formule  $\phi_n$  qui exprime que les points  $c$  et  $d$  sont à distance au moins  $n$ . On considère la théorie  $T' = T \cup \{\phi_n\}$ . Toute partie finie de  $T'$  admet  $\mathbb{Z}^2$  comme modèle (en choisissant des interprétations de  $c$  et  $d$  suffisamment éloignées). Par le théorème de compacité,  $T'$  possède donc un modèle. Un tel modèle ne peut pas être connecté.  $\square$

**Question 8.** On considère un ensemble fini  $\tau$  de tuiles de Wang. Supposons que l'ensemble des couleurs de ces tuiles soit  $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, c\}$ .

On ajoute aux symboles de fonctions précédents  $w, e, n, s$  des symboles de relations unaires  $C_1, C_2, \dots, C_c$  et des symboles de relations unaires  $C'_1, C'_2, \dots, C'_c$ .

On souhaite que  $C_i(x)$  soit vraie si et seulement si la couleur du côté droit de  $x$  est  $i$ .

On souhaite que  $C'_i(x)$  soit vraie si et seulement si la couleur du côté haut de  $x$  est  $i$ .

---

3. Ceux de l'égalité et les 8 axiomes précédents.

Ecrire une théorie  $T_\tau$  (c'est-à-dire un ensemble d'axiomes) qui code le fait que chaque cellule a ses côtés colorés avec l'une des couleurs de  $\mathcal{C}$ , et que les couleurs des côtés correspondent à une tuile de  $\tau$ .

Rappel : on vise à capturer dans toute cette sous-section un pavage du plan (donc non-borné).

Solution : On considère les axiomes  $E_0$  avec les axiomes<sup>4</sup> :

$$\forall x \bigvee_{1 \leq i \leq c} C_i(x)$$

et

$$\forall x \bigwedge_{1 \leq j \neq i \leq c} (C_i(x) \Rightarrow \neg C_j(x))$$

De même, on ajoute

$$\forall x \bigvee_{1 \leq i \leq c} C'_i(x)$$

et

$$\forall x \bigwedge_{1 \leq j \neq i \leq c} (C'_i(x) \Rightarrow \neg C'_j(x))$$

Il suffit d'ajouter en qu'en chaque position, on utilise une des tuiles de  $\tau$  :

$$\forall x \bigvee_{(d,h,g,b) \in \tau} (C_d(x) \wedge C_g(w(x)) \wedge C'_h(x) \wedge C'_b(s(x))).$$

□

**Question 9.** Prouver que  $T_\tau$  est consistant si et seulement si  $\tau$  pave le plan  $\mathbb{Z}^2$ .

Solution : La question précédente donne par construction un des sens de l'implication. Pour l'autre sens. Supposons que  $T_\tau$  possède un modèle : on peut "déplier" ce modèle en partant d'un élément  $x$  du modèle (quelconque) en appliquant les fonctions  $w, e, n, s$  pour se promener sur tout  $\mathbb{Z}^2$ . En effet, on peut définir un coloriage des côtés des cellules de  $\mathbb{Z}^2$  : on prend les couleurs des côtés droits et haut de  $(0,0)$  donnés par ceux de  $x$ , et les couleurs des côtés droits et haut de  $(i,j)$  donnés par ceux de  $e^i(n^j(x))$ . Le coloriage de  $\mathbb{Z}^2$  obtenu est bien un pavage valide du plan en raison des axiomes. □

On dira dans ce sujet qu'un pavage du plan est *périodique* s'il existe deux entiers  $p$  et  $q$  tels que pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ , la tuile en  $(x_1, x_2)$  est la même qu'en  $(x_1 + p, x_2)$  et aussi la même qu'en  $(x_1, x_2 + q)$  (et donc aussi la même qu'en  $(x_1 + p, x_2 + q)$ ).

**Question 10.** Prouver que  $T_\tau$  possède un modèle fini (c'est-à-dire de domaine fini) si et seulement si  $\tau$  peut paver le plan de façon périodique.

Solution : Considérons un pavage périodique : on peut le déplier sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  et obtenir un modèle de  $T_\tau$ , puisque la cellule à la position  $(x_1 + p, x_2)$  a le même état que celle à  $(x_1, x_2)$  ou  $(x_1, x_2 + q)$ .

Si l'on a un modèle fini, on peut le "déplier" comme dans la question précédente pour obtenir un pavage périodique du plan. □

---

4. Les symboles  $\bigvee_{condition}$  et  $\bigwedge_{condition}$  s'interprètent bien évidemment comme la disjonction et conjonctions pour les  $i$  et  $j$  qui satisfont *condition*.

### 3.2 Pavabilité du plan

L'objectif de cette sous-section (indépendante de ce qui précède) est de démontrer qu'il n'est pas possible de décider si un ensemble  $\tau$  de tuiles de Wang pave le plan.

**Question 11.** *Prouver qu'il n'est pas possible de décider si une machine de Turing donnée accepte le mot vide.*

*Solution :* Cela découle du théorème de Rice. Pour une démonstration indépendante : on réduit le problème de l'arrêt des machines de Turing à ce problème : étant données une machine de Turing  $M$  et une entrée  $w$ , on peut y associer une machine  $M_w$  qui écrit  $w$  sur son ruban et simule ensuite  $M$  sur  $w$ .  $M_w$  partant sur un ruban vide acceptera si et seulement si  $M$  accepte  $w$ .  $\square$

On veut réduire le problème de l'arrêt d'une machine de Turing  $M$  sur un ruban vide au problème du pavage du plan : pour une machine  $M$ , on va considérer un ensemble de tuiles.

L'ensemble  $\mathcal{C}$  des couleurs que l'on va utiliser est donné par

$$\mathcal{C} = \{., =, -, :\} \cup \Gamma \cup Q \cup (Q \times \Gamma)$$

où  $Q$  est l'ensemble des états de la machine  $M$ ,  $\Gamma$  l'alphabet utilisé par la machine  $M$  (alphabet de travail).

Concrètement, on considère

- d'une part les tuiles ci-dessous, où  $b \in \Gamma$  est le symbole de blanc, et  $q_0 \in Q$  l'état initial de  $M$  (pour éviter trop de lourdeurs, on note  $q_0b$  pour le couple  $(q_0, b)$ . On utilisera la même convention dans la suite).



(a)



(b)



(c)



(d)

- d'autre part : On note  $q_a$  et  $q_r$  l'état d'acceptation et de refus respectivement de  $M$  :
  - pour chaque lettre  $\alpha \in \Gamma$  de l'alphabet de  $M$ , on ajoute une tuile (e) ;
  - pour chaque couple  $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ , avec  $q \neq q_a, q \neq q_r$ , une tuile (f) ou une tuile (g) ou une tuile (h) : on prend la tuile (f) si  $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', \leftarrow)$ , (g) si  $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', |)$ , et (h) si  $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', \rightarrow)$  ;
  - pour chaque couple  $q \in Q, \alpha \in \Gamma$ , avec  $q \neq q_a, q \neq q_r$ , une tuile (i) et une tuile (j).

Avec :



(e)



(f)



(g)



(h)



(i)



(j)

**Question 12.** *On suppose que l'on a la tuile (c) à la position  $(0,0)$  de  $\mathbb{Z}^2$ . Montrer que dans tout pavage du plan, sa gauche et sa droite sont nécessairement remplis de tuiles de type (b) ou de type (d), et que dans toutes les lignes plus bas il n'y a que des tuiles de type (a).*

*Solution :* Les tuiles précédentes ne vérifient pas la première propriété. En effet, rien n'interdit de remplir une ligne complète avec la tuile (c).

On peut toutefois dire qu'avec ces tuiles, il n'y a que des tuiles (b), (c) et (d) sur la ligne d'ordonnée 0, car ce sont les seules avec les symboles = et -. Toutes ces tuiles possédant le symbole . en bas, il faut compléter avec la seule tuile avec le symbole . en haut.

Une façon de garantir les deux propriétés serait de considérer les tuiles



(a)



(b)



(c)



(d)

en lieu et place des tuiles précédentes. Cette fois, on a nécessairement le symbole - à droite de (0,0) et = à gauche de (0,0). □

**Question 13.** On suppose que l'on a la tuile (c) à la position (0,0) de  $\mathbb{Z}^2$  dans un pavage du plan. Décrire la ligne au dessus.

*Solution :* Cette ligne contient uniquement des tuiles parmi (e) à (j). □

**Question 14.** Démontrer que le problème de décision suivant est indécidable :

- **Donnée:** un ensemble fini  $\tau$  de tuiles de Wang, et une tuile  $s \in \tau$ .
- **Réponse:** Décider s'il est possible de paver le plan  $\mathbb{Z}^2$  avec les tuiles de  $\tau$  en plaçant la tuile  $s$  en (0,0).

*Solution :* On réduit le problème de l'arrêt d'une machine de Turing  $M$  sur un ruban vide à ce problème : pour une machine  $M$ , on considère les tuiles



(a)



(b)



(c)



(d)

à la place de (a), (b), (c), et (d) et  $s$  qui correspond à la tuile (c).

Le principe de ces tuiles est qu'un pavage par ces tuiles décrit le diagramme espace-temps de  $M$ .

Si  $M$  n'accepte pas le mot vide, le plan sera pavé par le calcul de  $M$  qui continue à jamais. Si  $M$  accepte le mot vide, il n'est pas possible de paver tout le plan, car il n'y pas de tuile contenant l'état accepteur  $q_a$ . □

On admettra que le problème reste indécidable même sans imposer la tuile en (0,0).

**Question 15.** Démontrer que l'on peut paver le plan si et seulement si l'on peut paver tous les carrés de côté fini (on pourra utiliser le Lemme de König qui dit que tout arbre qui possède un nombre infini de sommets et dont tout sommet a un degré fini<sup>5</sup> possède un chemin infini).

*Solution :* Clairement si l'on sait paver le plan on peut paver tous les carrés de côté fini. Réciproquement, on considère l'arbre dont les sommets sont les pavages licites de tous les carrés de taille finie. La racine de l'arbre est le pavage du carré de côté nul. Un sommet représentant un pavage d'un carré de côté  $n$  admet comme fils dans l'arbre tout sommet représentant un pavage

5. On appelle *degré* d'un sommet d'un arbre son nombre de fils (c'est donc le nombre de voisins du sommet moins 1 (son père) si ce n'est pas la racine, et son nombre de voisins si c'est la racine).



d'un carré de côté  $n+1$  qui est une extension du pavage de son père. Comme le nombre de tuiles est fini, chaque sommet possède qu'un nombre fini de fils. Cet arbre possède un nombre infini de sommets puisque l'on sait paver tous les rectangles de côté  $n$  pour tout  $n$ . Par le lemme de König, cet arbre possède un chemin infini qui donne un pavage du plan.  $\square$

**Question 16.** *Déduire des résultats précédents qu'il n'est pas vrai que tout pavage du plan avec un nombre fini de tuiles de Wang est obtenu en répétant à jamais un motif périodique.*

*Solution :* Si tout pavage du plan avec un nombre fini de tuiles de Wang est périodique, on pourrait décider la pavabilité du plan par un ensemble de tuiles : lancer en parallèle les deux semi-algorithmes suivants : trouver le motif périodique et chercher un contre-exemple. Plus précisément, on considère successivement tous les carrés de côtés  $0, 1, \dots, n, n+1$ . Soit on trouve un carré impossible à paver et il est impossible de paver tout le plan, soit on fini par trouver un motif périodique que l'on peut utiliser pour paver tout le plan. Cet algorithme devrait toujours terminer.

Or nous avons montré que le problème était indécidable.  $\square$

### 3.3 Pavage d'un rectangle

On considère dans cette sous-section (indépendante de ce qui précède et de ce qui suit) que le domaine  $R$  à paver est un rectangle borné du plan à dimensions entières.

On s'intéresse au problème de décision PAVAGE-RECTANGLE:

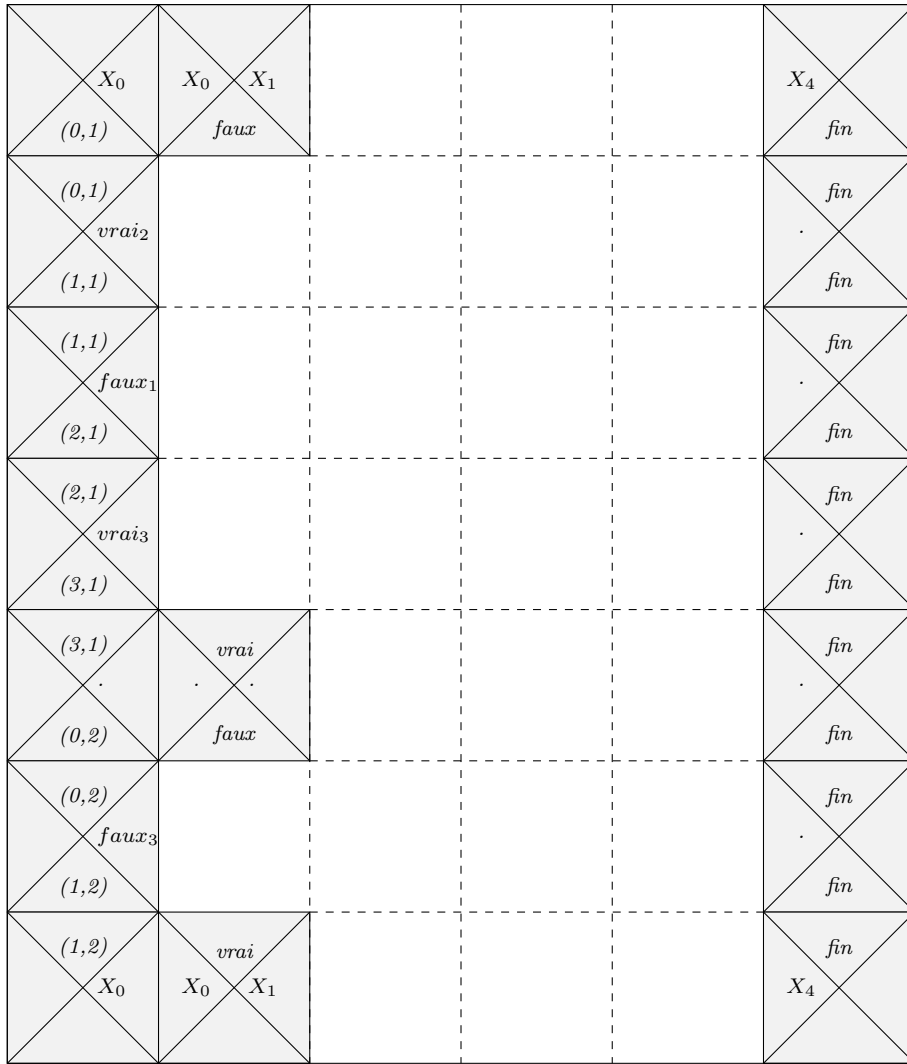
- **Donnée:** un rectangle  $R$  à côtés de dimensions entières, un ensemble de tuiles de Wang  $\tau$
- **Réponse:** déterminer si l'on peut paver  $R$  par  $\tau$  à bords blancs.

**Question 17.** *Prouver que le problème PAVAGE-RECTANGLE est dans NP.*

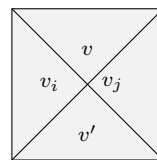
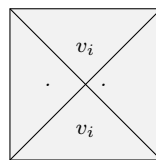
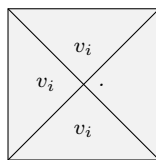
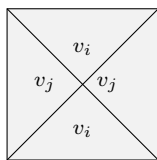
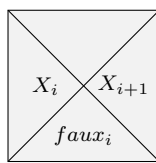
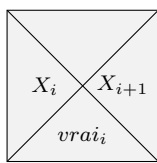
*Solution :* Le problème est dans NP, car la donnée des tuiles en chaque point du rectangle  $R$  constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.  $\square$

**Question 18.** *La formule propositionnelle  $(x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$  est-elle satisfiable ?*

*Peut-on compléter le rectangle  $6 \times 7$  suivant*



avec les tuiles



pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $v_i \in \{vrai_i, faux_i\}$ ,  $v, v' \in \{vrai, faux\}$ ,  $v' = v \vee (v_i = v_j)$ , pour obtenir un pavage licite ?

*Solution :*

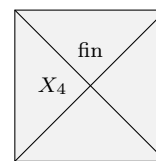
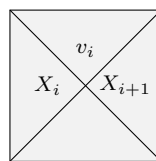
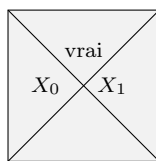
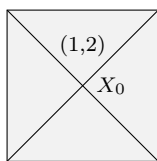
La formule propositionnelle est satisfiable : il suffit de prendre  $x_1 = faux$ ,  $x_2 = vrai$ , et  $x_3 = faux$  par exemple.

Avec ces tuiles, il n'est pas possible d'obtenir un pavage licite, car il y a aucune tuile dont la couleur du bord bas est blanche.

Remarque (bonus) : on peut cependant coder cette affectation par un pavage comme suit :

	$X_0$	$X_0$ $X_1$	$X_1$ $X_2$	$X_2$ $X_3$	$X_3$ $X_4$	$X_4$
(0,1)		faux	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(0,1)		faux	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(1,1)	vrai <sub>2</sub>	vrai <sub>2</sub> vrai <sub>2</sub>	vrai <sub>2</sub> vrai <sub>2</sub>	vrai <sub>2</sub> ·	· ·	·
(1,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(1,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(2,1)	faux <sub>1</sub>	faux <sub>1</sub> faux <sub>1</sub>	faux <sub>1</sub> ·	· ·	· ·	·
(2,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(2,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(3,1)	vrai <sub>3</sub>	vrai <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	·
(3,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(3,1)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(0,2)		faux	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(0,2)		faux	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(1,2)	faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	faux <sub>3</sub> faux <sub>3</sub>	·
(1,2)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
(1,2)		vrai	faux <sub>1</sub>	vrai <sub>2</sub>	faux <sub>3</sub>	fin
	$X_0$	$X_0$ $X_1$	$X_1$ $X_2$	$X_2$ $X_3$	$X_3$ $X_4$	$X_4$

si on ajoute les tuiles suivantes pour  $i = 1, 2, 3, v_i \in \{vrai_i, faux_i\}$  :



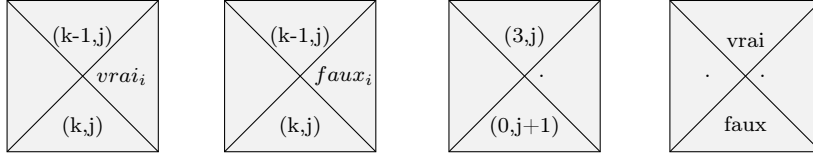
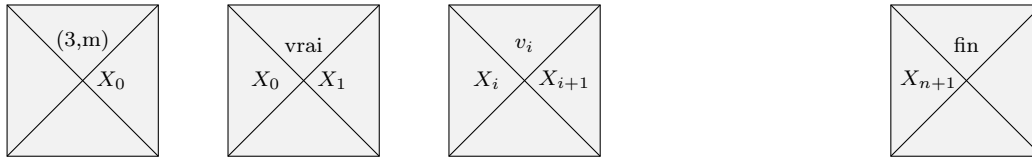
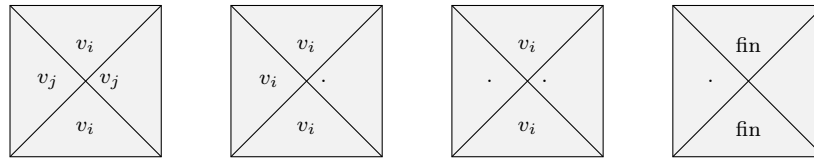
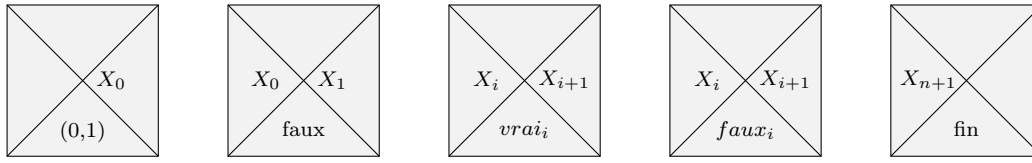
□

**Question 19.** En analysant le lien dans la question précédente entre les deux questions posées, prouver que le problème PAVAGE-RECTANGLE est NP-complet.

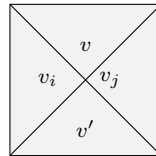
*Solution :*

On construit une réduction à partir de 3-SAT. On utilise un rectangle dont la deuxième colonne code la propagation de la valeur de vérité de l'évaluation d'une formule 3-SAT, et la première ligne, sur les colonnes de 3 à 3 + n codent la valeur de vérité des n variables de la formule. La première colonne code la formule 3-SAT.

Pour une formule  $\phi$  en forme 3-SAT contenant les clauses  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , avec  $n$  variables, on considère les tuiles suivantes où  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_i \in \{vrai_i, faux_i\}$ .



$1 \leq k \leq 3$ , si le littéral  $k$  de la clause  $j$  est  $x_i$      $1 \leq k \leq 3$ , si le littéral  $k$  de la clause  $j$  est  $\neg x_i$



où  $v, v' \in \{vrai, faux\}$  avec  $v' = v \vee (v_i = v_j)$ .

pour réduire 3-SAT au problème PAVAGE-RECTANGLE :

Les tuiles de la première ligne garantissent le choix d'une valeur vraie ou fausse pour chacune des  $n$  variables.

Les tuiles de la seconde ligne propagent ces valeurs de haut en bas et vers la gauche selon des chemins en angle droit jusqu'à la deuxième colonne.

Les tuiles de la troisième ligne ferment en bas le rectangle et garantissent que le calcul qui se fait sur la deuxième colonne se termine par vrai (deuxième tuile de la troisième ligne).

Enfin les tuiles de la quatrième lignes codent les littéraux de chacune des clauses.

Ajouter ces tuiles permet de vérifier sur la deuxième colonne qu'il est bien vrai que chacune des clauses est satisfaite : pour cela, clause par clause on doit transformer un faux en vrai verticalement, et on réinitialise le calcul sur la clause suivante à faux.

□

### 3.4 De la logique aux pavages

Cette sous-section est indépendante des précédentes.

Historiquement, Wang a introduit ses tuiles en cherchant à comprendre si les formules de type  $\forall_1 \exists_1 \forall_1$  sont décidables.

L'objet de cette question est de voir via un exemple comment les pavages apparaissent.

On considère la formule suivante

$$\phi = \forall x \exists y \forall z (S(x, y) \wedge T(x, y, z) \wedge \neg T(y, y, z)) \vee \neg S(x, y).$$

On se demande s'il existe une structure  $\mathfrak{M}$  où la formule  $\phi$  est vraie. Il faut donc choisir un ensemble  $M$ , définir des relations  $S^{\mathfrak{M}}$  et  $T^{\mathfrak{M}}$  telles que  $\mathfrak{M}$  vérifie  $\phi$  pour ces interprétations de  $S$  et  $T$ .

Considérons une structure  $\mathfrak{M}$  où  $\phi$  est vraie : on peut donc trouver pour tout  $x$  un  $y$  qui rend vraie la formule  $\forall z (S(x, y) \wedge T(x, y, z) \wedge \neg T(y, y, z)) \vee \neg S(x, y)$ . Notons, par abus de notation,  $f(x)$  cet élément  $y$ .

**Question 20.** *On part d'un élément  $x_0$  et on considère l'ensemble  $A = \{f^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ . Montrer que cela donne une sous-structure de  $\mathfrak{M}$  qui vérifie également la formule  $\phi$  (on appelle sous-structure une structure dont le domaine est un sous-ensemble du domaine de la structure  $\mathfrak{M}$ ).*

*Solution :* Immédiat. □

On considère maintenant la structure sur  $\mathbb{N}$  (de signature contenant les symboles de relations  $S$  et  $T$ ) définie de la façon suivante :

- $(n, m) \in S^{\mathbb{N}}$  si et seulement si  $(f^n(x_0), f^m(x_0)) \in S^{\mathfrak{M}}$  ;
- $(n, m, p) \in T^{\mathbb{N}}$  si et seulement si  $(f^n(x_0), f^m(x_0), f^p(x_0)) \in T^{\mathfrak{M}}$ .

Autrement dit, on identifie  $n$  et  $f^n(x_0)$ .

Par construction  $\mathbb{N}$  vérifie la formule  $\phi$  ou plus exactement

$$\psi = \forall x \forall z (S(x, x+1) \wedge T(x, x+1, z) \wedge \neg T(x+1, x+1, z)) \vee \neg S(x, x+1).$$

**Question 21.** *Montrer que la satisfiabilité de  $\psi$  est équivalente à un problème de pavabilité (d'un huitième de plan que l'on précisera).*

*(On pourra observer qu'à  $x$  et  $z$  donnés, la véracité de la formule dépend uniquement de la valeur de  $T$  et de  $S$  sur les valeurs de  $x, x+1$  et  $z$ ).*

*Solution :* A  $x$  et  $z$  donné, la véracité de la formule dépend uniquement de la valeur de  $T$  et de  $S$  sur les valeurs de  $x, x+1$  et  $z$ .

Pour chaque  $x$  et  $z$ , on note  $C(x, z)$  la liste des valeurs de vérité de  $T$  et  $S$  en tous ces points, c'est-à-dire la valeur de  $S(a, b)$  et  $T(a, b, c)$  pour  $(a, b, c) \in \{x, x+1, z\}^3$ .  $C(x, z)$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, que l'on va chercher à voir comme des couleurs.

Ces termes sont soumis aux contraintes suivantes :

- la formule  $\psi$  doit être vraie en  $(x, z)$  ;
- $C(x, z)$  doit être en accord avec  $C(x+1, z)$  sur toutes les valeurs qu'ils ont en commun ;
- $C(x, z)$  doit être en accord avec  $C(x, z+1)$  sur toutes les valeurs qu'ils ont en commun : par exemple la valeur de  $T(x, x+1, x+1)$  doit coïncider ;
- Si  $z = x$  ou  $z = x+1$  alors les valeurs de vérité de  $C(x, z)$  doivent en tenir compte : si  $z = x$ , la valeur de vérité de  $T(x, x, x+1)$  doit être la même que  $T(x, z, x+1)$ .

Si on se donne des  $C(x, z)$  avec  $z \geq x$  qui satisfont les contraintes plus haut, cela permet de définir de façon non contradictoire une valeur de vérité pour  $T(., ., .)$  et  $S(., .)$ , et donc de satisfaire  $\psi$ .

---

6. Une formule de type  $\forall_1 \exists_1 \forall_1$  est une formule en forme prénexe dont le préfixe correspond à une unique quantification existentielle entre deux uniques quantifications universelles (et aucun autre quantificateur  $\forall$  et  $\exists$ ).

De plus ces contraintes sont des contraintes locales : la valeur de vérité en un point ne dépend que des valeurs de vérité des points voisins, et du fait que ce point est sur la diagonale (les deux cas particuliers  $z = x$  et  $z = x + 1$ ) ou non. Savoir si  $\phi$  est satisfiable est donc équivalent à un problème de pavage du huitième de plan, c'est-à-dire des cellules  $(x, z)$  ou  $z \geq x$  par un nombre fini de couleurs (les  $C(x, z)$ ) soumis à des contraintes locales et ayant des valeurs particulières sur la diagonale.  $\square$

## Notes bibliographiques

Ce sujet est basé sur le document d'habilitation à diriger les recherches de Emmanuel Jeandel, en particulier du chapitre reprenant un article co-écrit avec Alexis Ballier paru dans "*Journées Automates Cellulaires (JAC) 2008*", sur le cours "*Cellular Automata*" de Jarkko Karri, et enfin sur l'article "*Les dominos de Wang*" de Jean-Jacques Lévy, paru dans *Quadrature* 82(2011) 1-5. Sujet rédigé par Olivier Bournez, sur une idée de sujet proposée par Bruno Salvy.