Chapitre 5

Calcul des prédicats

Le calcul propositionnel reste très limité, et ne permet essentiellement que d'exprimer des opérations booléennes sur des propositions.

Si l'on veut pouvoir raisonner sur des assertions mathématiques, il nous faut autoriser des constructions plus riches. Par exemple, on peut vouloir écrire l'énoncé

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > \mathbf{1}+\mathbf{1}) \Rightarrow Impair(x)). \tag{5.1}$$

Un tel énoncé n'est pas capturé par la logique propositionnelle. Tout d'abord par ce qu'il utilise des prédicats comme $Premier(x)$ dont la valeur de vérité dépend d'une variable x, ce qui n'est pas possible en logique propositionnelle. Par ailleurs, on utilise ici des quantificateurs comme $\exists$, $\forall$ qui ne sont pas présents non plus en logique propositionnelle.

L'énoncé précédent est un exemple de formule du calcul des prédicats du *premier ordre*. Dans ce cours, on ne parlera que de logique du premier ordre. La terminologie *premier ordre* fait référence au fait que les quantifications existentielles et universelles ne sont autorisées que sur les variables.

Un énoncé *du second ordre*, on parle plus généralement *d'ordre supérieur*, serait un énoncé où l'on autoriserait les quantifications sur les fonctions ou des relations : par exemple, on peut écrire $\neg\exists f(\forall x(f(x) > f(x+\mathbf{1})))$ pour signifier qu'il n'existe pas de suite infiniment décroissante. On ne cherchera pas à comprendre la théorie derrière ce type d'énoncé, car on le verra, les problèmes et difficultés avec le premier ordre sont déjà suffisamment nombreux.

L'objectif de ce chapitre est alors de définir la logique du premier ordre. Comme pour la logique propositionnelle, on va le faire en parlant d'abord de la *syntaxe*, c'est-à-dire comment on écrit les formules, puis de leur *sémantique*.

Le calcul des prédicats, reste le formalisme le plus courant pour exprimer des propriétés mathématiques. C'est aussi un formalisme très utilisé en informatique pour décrire les objets : par exemple, les langages de requêtes à des bases de données sont essentiellement basés sur ce formalisme, appliqué à des objets finis, qui représentent des données.

5.1 Syntaxe

Pour écrire une formule d'un langage du premier ordre, on utilise certains symboles qui sont communs à tous les langages, et certains symboles qui varient d'un langage à l'autre. Les symboles communs à tous les langages sont :

- les connecteurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
- les parenthèses (et) et la virgule , ;
- le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$;
- un ensemble infini dénombrable de symboles $\mathcal{V}$ de variables.

Les symboles qui peuvent varier d'un langage à l'autre sont capturés par la notion de *signature*. Une signature fixe les symboles de constantes, les symboles de fonctions et les symboles de relations qui sont autorisés.

Formellement :

Définition 5.1 (Signature d'un langage du premier ordre) *La* signature

$$\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$$

d'un langage du premier ordre est la donnée :

- *d'un premier ensemble $\mathcal{C}$ de symboles, appelés* symboles de constantes *;*
- *d'un second ensemble $\mathcal{F}$ de symboles, appelés* symboles de fonctions*. A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle* son arité
- *d'un troisième ensemble $\mathcal{R}$ de symboles, appelés* symboles de relations*. A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle* son arité*.*

On suppose que $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ sont des ensembles disjoints deux à deux.

Une formule du premier ordre sera alors un mot sur l'alphabet

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), ,, \forall, \exists\}.$$

Remarque 5.1 *On utilisera dans ce qui suit les conventions suivantes : On convient que x, y, z, u et v désignent des variables, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{V}$. a, b, c, d désigneront des constantes, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{C}$.*

L'intuition est que les symboles de constantes, fonctions et relations auront vocation ensuite a être interprétés (dans ce que l'on appellera des *structures*) ; l'arité d'un symbole de fonction ou de relation aura pour vocation à correspondre au nombre d'arguments de la fonction ou de la relation.

Exemple 5.1 *Par exemple, on peut considérer la signature*

$$\Sigma = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{s, +\}, \{Impair, Premier, =, <\})$$

qui possède les symboles de constante $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, le symbole de fonction $+$ d'arité 2, le symbole de fonction s d'arité 1, les symboles de relations $Impairs$ et $Premier$ d'arité 1, les symboles de relations $=$ et $<$ d'arité 2.

Exemple 5.2 *On peut aussi considérer la signature* $\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$ *avec* c, d *deux symboles de constante,* f *un symbole de fonction d'arité* 1*,* g *et* h *deux symboles de fonctions d'arité* 2*,* R *un symbole de relation d'arité* 2*.*

On va définir par étapes : d'abord les *termes*, qui visent à représenter des objets, puis les *formules atomiques*, qui visent à représenter des relations entre objets, et enfin les formules.

5.1.1 Termes

Nous avons déjà défini les termes dans le chapitre 2Récursivité et inductionchapter.2 : ce que nous appelons ici *terme sur une signature* Σ, est un terme construit sur l'union de l'ensemble des symboles de fonctions de la signature, des symboles de constantes de la signature, et des variables.

Pour être plus clair, réexprimons notre définition :

Définition 5.2 (Termes sur une signature) *Soit* $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ *une signature.*

L'ensemble T *des* termes *sur la signature* Σ *est le langage sur l'alphabet* $\mathcal{A}(\Sigma)$ *défini inductivement par :*

(B) *toute variable est un terme :* $\mathcal{V} \subset T$ *;*

(B) *toute constante est un terme :* $\mathcal{C} \subset T$ *;*

(I) *si* f *est un symbole de fonction d'arité* n *et si* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *sont des termes, alors* $f(t_1, \cdots, t_n)$ *est un terme.*

Définition 5.3 *Un* terme clos *est un terme sans variable.*

Exemple 5.3 $+(x, s(+(\mathbf{1}, \mathbf{1})))$ *est un terme sur la signature de l'exemple 5.1 qui n'est pas clos.* $+(+(s(\mathbf{1}), +(\mathbf{1}, \mathbf{1})), s(s(\mathbf{0})))$ *est un terme clos.*

Exemple 5.4 $h(c, x)$*,* $h(y, z)$*,* $g(d, h(y, z))$ *et* $f(g(d, h(y, z)))$ *sont des termes sur la signature* $\mathcal{L}_2$ *de l'exemple 5.2.*

5.1.2 Formules atomiques

Définition 5.4 (Formules atomiques) *Soit* $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ *une signature.*

Une formule atomique *sur la signature* Σ *est un mot sur l'alphabet* $\mathcal{A}(\Sigma)$ *de la forme* $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$*, où* $R \in \mathcal{R}$ *est un symbole de relation d'arité* n*, et où* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *sont des termes sur* Σ*.*

Exemple 5.5 $> (x, +(\mathbf{1}, \mathbf{0}))$ *est une formule atomique sur la signature de l'exemple 5.1.* $= (x, s(y))$ *aussi.*

Exemple 5.6 $R(f(x), g(c, f(d)))$ *est une formule atomique sur* $\mathcal{L}_2$*.*

Remarque 5.2 *On va convenir parfois d'écrire* $t_1 R t_2$ *pour certains symboles binaires, comme* $=$*,* $<$*,* $+$ *pour éviter des notations trop lourdes : par exemple, on écrira* $x > \mathbf{1} + \mathbf{1}$ *pour* $> (x, +(\mathbf{1}, \mathbf{1}))$*.*

5.1.3 Formules

Définition 5.5 (Formules) *Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.*

L'ensemble des formules sur la signature Σ est le langage sur l'alphabet $\mathcal{A}(\Sigma)$ défini inductivement par :

(B) *toute formule atomique est une formule ;*

(I) *si F est une formule, alors $\neg F$ est une formule ;*

(I) *si F et G sont des formules, alors $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, et $(F \Leftrightarrow G)$ sont des formules ;*

(I) *si F est une formule, et si $x \in \mathcal{V}$ est une variable, alors $\forall x F$ est une formule, et $\exists x F$ aussi.*

Exemple 5.7 *L'énoncé $\forall x((Premier(x) \wedge x > \mathbf{1}+\mathbf{1}) \Rightarrow Impair(x))$ est une formule sur la signature de l'exemple 5.1.*

Exemple 5.8 $\exists x(s(x) = \mathbf{1} + \mathbf{0} \vee \forall y\, x + y > s(x))$ *aussi.*

Exemple 5.9 *Exemples de formules sur la signature $\mathcal{L}_2$:*

– $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$
– $\forall x \exists y(g(x, y) = c \wedge g(y, x) = c)$ *;*
– $\forall x \neg f(x) = c$ *;*
– $\forall x \exists y \neg f(x) = c$*.*

5.2 Premières propriétés et définitions

5.2.1 Décomposition / Lecture unique

Comme pour les formules du calcul propositionnel, on peut toujours décomposer une formule, et ce de façon unique.

Proposition 5.1 (Décomposition / Lecture unique) *Soit F une formule. Alors F est d'une, et exactement d'une, des formes suivantes :*

1. *une formule atomique ;*
2. *$\neg G$, où G est une formule ;*
3. *$(G \wedge H)$ où G et H sont des formules ;*
4. *$(G \vee H)$ où G et H sont des formules ;*
5. *$(G \Rightarrow H)$ où G et H sont des formules ;*
6. *$(G \Leftrightarrow H)$ où G et H sont des formules ;*
7. *$\forall x G$ où G est une formule et x une variable ;*
8. *$\exists x G$ où G est une formule et x une variable.*

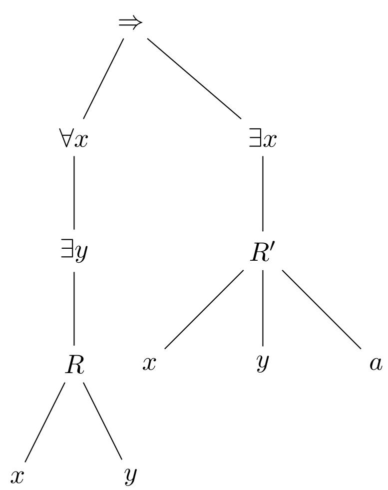
De plus dans le premier cas, il y a une unique façon de "lire" la formule atomique. Dans chacun des autres cas, il y a unicité de la formule G et de la formule H avec cette propriété.

On peut alors naturellement représenter chaque formule par un arbre (son arbre de décomposition, qui est en fait en correspondance immédiate avec son arbre de dérivation au sens du chapitre 2Récursivité et inductionchapter.2) : chaque sommet est étiqueté par un symbole de constante, de fonction, de relation, ou par les symboles $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ou un quantificateur existentiel ou universel.

Exemple 5.10 *Par exemple, la formule*

$$(\forall x \exists y R(x, y) \Rightarrow \exists x R'(x, y, a)) \tag{5.2}$$

se représente par l'arbre suivant



Chaque sous-arbre d'un tel arbre représente une *sous-formule* de F. Si l'on préfère :

Définition 5.6 (Sous-formule) *Une formule G est une sous-formule d'une formule F si elle apparaît dans la décomposition de F.*

Exercice 5.1. *On fixe une signature contenant les symboles de relations R_1, R_2 d'arité respective 1 et 2. On fixe l'ensemble de variables $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Quelles sont les écritures suivantes qui correspondents à des formules :*
- $(R_1(x_1) \wedge R_2(x_1, x_2, x_3))$
- $\forall x_1 (R_1(x_1) \wedge R_2(x_1, x_2, x_3))$
- $\forall x_1 \exists R (R(x_1) \wedge R_2(x_1, x_1))$
- $\forall x_1 \exists x_3 (R_1(x_1) \wedge R_3(x_1, x_2, x_3))$

5.2.2 Variables libres, variables liées

L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables *liées* des variables qui ne le sont pas : tout cela est en fait à propos des "$\forall x$" et "$\exists x$" qui sont des *lieurs* : lorsqu'on écrit $\forall x F$ ou $\exists x F$, x devient une variable liée. En d'autres termes, x est une variable muette dans le sens où la valeur de vérité de $\forall xF$ ou $\exists xF$ aura vocation, lorsqu'on parlera de la sémantique des formules, à ne pas dépendre de x : on pourrait tout aussi bien écrire $\forall yF(y/x)$ (respectivement : $\exists yF(y/x)$) où $F(y/x)$ désigne intuitivement la formule que l'on obtient en remplaçant x par y dans F.

Remarque 5.3 *On a le même phénomène dans des symboles comme le symbole intégrale en mathématique : dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est une variable muette (liée). En particulier $\int_a^b f(u)du$ est exactement la même intégrale.*

Faisons cela toutefois très proprement. Une même variable peut apparaître plusieurs fois dans une formule : nous avons besoin de savoir repérer chaque occurrence, en faisant attention aux $\exists$ et $\forall$.

Définition 5.7 (Occurrence) *Une* occurrence *d'une variable x dans une formule F est un entier n tel que le $n$ème symbole du mot F est x et tel que le $(n-1)$ème symbole ne soit pas $\forall$ ni $\exists$.*

Exemple 5.11 8 *et* 17 *sont des occurrences de x dans la formule* (5.2). 7 *et* 14 *n'en sont pas : 7 parce que le 7ème symbole de F n'est pas un x (c'est une parenthèse ouvrante) et 14 parce que le 14ème symbole de F qui est bien un x est quantifié par un il existe.*

Définition 5.8 (Variable libre, variable liée)
- *Une occurrence d'une variable x dans une formule F est une* occurrence liée *si cette occurrence apparaît dans une sous-formule de F qui commence par un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$. Sinon, on dit que l'occurrence est* libre.
- *Une variable est* libre *dans une formule si elle possède au moins une occurrence libre dans la formule.*
- *Une formule F est close si elle ne possède pas de variables libres.*

Exemple 5.12 *Dans la formule* (5.2)*, les occurrences* 8, 17 *et* 10 *de x sont liées. L'occurrence* 19 *de y est libre.*

Exemple 5.13 *Dans la formule $(R(x,z) \Rightarrow \forall z(R(y,z) \vee y = z))$, la seule occurrence de x est libre, les deux occurrences de y sont libres. La première (plus petite) occurrence de z est libre, et les autres sont liées. La formule $\forall x \forall z(R(x,z) \Rightarrow \exists y(R(y,z) \vee y = z))$ est close.*

La notation $F(x_1, \cdots, x_k)$ signifie que les variables libres de F sont parmi $x_1, \cdots, x_k$.

Exercice 5.2. *Trouver les variables libres et les occurences libres dans les formules suivantes :*
- $\exists x(l(x) \wedge m(x))$
- $(\exists x l(x)) \wedge m(x))$

Exercice 5.3. *Montrer que les variables libres $\ell(F)$ d'une formule F s'obtiennent par la définition inductive suivante :*
- $\ell(R(t_1, \cdots, t_n)) = \{x_i | x_i \in \mathcal{V}$ *et x_i apparaît dans* $R(t_1, \cdots, t_n)\}$ *;*
- $\ell(\neg G) = \ell(G)$ *;*
- $\ell(G \vee H) = l(G \wedge H) = \ell(G \Rightarrow H) = \ell(G \Leftrightarrow H) = \ell(G) \cup \ell(H)$ *;*
- $\ell(\forall xF) = \ell(\exists xF) = \ell(F) \backslash \{x\}$.

5.3 Sémantique

Nous pouvons maintenant parler du sens que l'on donne aux formules. En fait, pour donner un sens aux formules, il faut fixer un sens aux symboles de la signature, et c'est l'objet de la notion de structure.

Définition 5.9 (Structure) *Soit* $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ *une signature.*

Une structure $\mathfrak{M}$ de signature Σ *est la donnée :*

- *d'un ensemble non-vide* M*, appelé* ensemble de base*, ou* domaine *de la structure ;*
- *d'un élément, noté* $c^{\mathfrak{M}}$*, pour chaque symbole de constante* $c \in \mathcal{C}$ *;*
- *d'une fonction, notée* $f^{\mathfrak{M}}$*, de* $M^n \to M$ *pour chaque symbole de fonction* $f \in \mathcal{F}$ *d'arité* n *;*
- *d'un sous-ensemble, noté* $R^{\mathfrak{M}}$*, de* M^n *pour chaque symbole de relation* $R \in \mathcal{F}$ *d'arité* n*.*

On dit que la constante c (respectivement la fonction f, la relation R) est *interprétée par* $c^{\mathfrak{M}}$ (resp. $f^{\mathfrak{M}}$, $R^{\mathfrak{M}}$). Une structure est parfois aussi appelée une *réalisation* de la signature.

Exemple 5.14 *Une réalisation de la signature* $\Sigma = (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{+, -\}, \{=, >\})$ *correspond à l'ensemble de base* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels, avec* $\mathbf{0}$ *interprété par l'entier* 0*,* $\mathbf{1}$ *par* 1*,* $+$ *par l'addition,* $-$ *par la soustraction,* $=$ *par l'égalité sur les entiers : c'est-à-dire par le sous-ensemble* $\{(x, x) | x \in \mathbb{N}\}$*, et* $>$ *par l'ordre sur les entiers, c'est-à-dire par le sous-ensemble* $\{(x, y) | x > y\}$*.*

On peut la noter $(\mathbb{N}, =, <, Impair, Premier, s, +, 0, 1)$*.*

Exemple 5.15 *Une autre réalisation de cette signature correspond à l'ensemble de base* $\mathbb{R}$ *des réels, où* $\mathbf{0}$ *est interprété par le réel* 0*,* $\mathbf{1}$ *est interprété par le réel* 1*,* $+$ *par l'addition,* $-$ *la soustraction, et* $=$ *par l'égalité sur les réels, et* $>$ *par l'ordre sur les réels.*

On peut la noter $(\mathbb{R}, =, <, Impair, Premier, s, +, 0, 1)$*.*

Exemple 5.16 *On peut obtenir une réalisation de la signature* $\mathcal{L}_2$ *en considérant l'ensemble de base* $\mathbb{R}$ *des réels, en interprétant* R *comme la relation d'ordre* $\leq$ *sur les réels, la fonction* f *comme la fonction qui à* x *associe* $x + 1$*, les fonctions* g *et* h *comme l'addition et la multiplication, les constantes* c *et* d *comme* 0 *et* 1*.*

On peut la noter $(\mathbb{R}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$*.*

On va ensuite utiliser la notion de structure pour interpréter les termes, les formules atomiques, puis inductivement les formules, comme on peut s'y attendre.

5.3.1 Interprétation des termes

Définition 5.10 (Valuation) *Fixons une structure* $\mathfrak{M}$*. Une* valuation v *est une distribution de valeurs aux variables, c'est-à-dire une fonction de* $\mathcal{V}$ *vers le domaine* M *de la structure* $\mathfrak{M}$*.*

Définition 5.11 (Interprétation des termes) *Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$.*

Soit t un terme de la forme $t(x_1, \cdots, x_k)$ sur Σ de variables libres $x_1, \cdots, x_k$.

Soit v une valuation.

*L'*interprétation $t^{\mathfrak{M}}$ du terme t pour la valuation v, *aussi notée $t^{\mathfrak{M}}[v]$, ou $t^{\mathfrak{M}}$ est définie inductivement de la façon suivante :*

- (B) *toute variable est interprétée par sa valeur par la valuation : si t est la variable $x_i \in v$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $v(x_i)$;*
- (B) *toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure : si t est la constante $c \in \mathcal{C}$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $c^{\mathfrak{M}}$;*
- (I) *chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure : si t est le terme $f(t_1, \cdots, t_n)$, alors $t^{\mathfrak{M}}$ est $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}})$, où $t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}$ sont les interprétations respectives des termes $t_1, \cdots, t_n$.*

Remarque 5.4 *L'interprétation d'un terme est un élément de M, où M est l'ensemble de base de la structure $\mathfrak{M}$: les termes désignent donc des éléments de la structure.*

Exemple 5.17 *Soit $\mathcal{N}$ la structure $(\mathbb{N}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$ de signature*

$$\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\}) :$$

- *l'interprétation du terme $h(d, x)$ pour une valuation telle que $v(x) = 2$ est* 2.
- *l'interprétation du terme $f(g(d, h(y, z)))$ pour une valuation telle que $v(y) = 2, v(z) = 3$ est* 8.

5.3.2 Interprétations des formules atomiques

Une formule atomique $F = F(x_1, \cdots, x_k)$ est un objet qui s'interprète soit par *vrai* soit par *faux* en une valuation v. Lorsque F s'interprète par vrai, on dit que *la valuation v satisfait F*, et on note ce fait $v \models F$. On note $v \not\models F$ dans le cas contraire.

Il ne nous reste plus qu'à définir formellement cette notion :

Définition 5.12 (Interpétation d'une formule atomique) *Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$.*

La valuation v satisfait la formule atomique $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ de variables libres $x_1, \cdots, x_k$ si $(t_1^{\mathfrak{M}}[v], t_2^{\mathfrak{M}}[v], \cdots, t_n^{\mathfrak{M}}[v]) \in R^{\mathfrak{M}}$, où $R^{\mathfrak{M}}$ est l'interprétation du symbole R dans la structure.

Exemple 5.18 *Par exemple, sur la structure de l'exemple 5.14, $x > \mathbf{1} + \mathbf{1}$ s'interprète par 1 (vrai) en la valuation $v(x) = 5$, et par 0 (faux) en la valuation $v(x) = 0$. La formule atomique $\mathbf{0} = \mathbf{1}$ s'interprète par 0 (faux).*

Exemple 5.19 *Sur la structure $\mathcal{N}$ de l'exemple 5.17, la formule atomique $R(f(c), h(c, f(d)))$ s'interprète par faux.*

5.3.3 Interprétation des formules

Plus généralement, une formule $F = F(x_1, \cdots, x_k)$ est un objet qui s'interprète soit par *vrai* soit par *faux* en une valuation v. Lorsque F s'interprète par vrai, on dit toujours que *la valuation v satisfait F*, et on note toujours ce fait $v \models F$, et $v \not\models F$ pour le cas contraire.

Définition 5.13 (Inteprétation d'une formule) *Soit $\mathfrak{M}$ une structure de signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$.*

L'expression "la valuation v satisfait la formule $F = F(x_1, \cdots, x_k)$", notée $v \models F$, se définit inductivement de la façon suivante :

(B) *elle a déjà été définie pour une formule atomique ;*

$\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *sont interprétés exactement comme dans le calcul propositionnel :*

(I) *la négation s'interprète par la négation logique :*
si F est de la forme $\neg G$, alors $v \models F$ ssi $v \not\models G$;

(I) *$\wedge$ s'interprète comme une conjonction logique :*
si F est de la forme $(G \wedge H)$, alors $v \models F$ ssi $v \models G$ et $v \models H$;

(I) *$\vee$ s'interprète comme le ou logique :*
si F est de la forme $(G \vee H)$, alors $v \models F$ ssi $v \models G$ ou $v \models H$;

(I) *$\Rightarrow$ s'interprète comme l'implication logique :*
si F est de la forme $(G \Rightarrow H)$, alors $v \models F$ ssi $v \models H$ ou $v \not\models G$;

(I) *$\Leftrightarrow$ s'interprète comme l'équivalence logique :*
si F est de la forme $(G \Leftrightarrow H)$, alors $v \models F$ ssi ($v \models G$ et $v \models H$) ou ($v \not\models G$ et $v \not\models H$).

$\exists x$ *et* $\forall x$ *sont interprétés comme des quantifications existentielles et universelles :*

(I) *si F est de la forme $\forall x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $v \models F$ ssi pour tout élément $a_0 \in M$ $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$;*

(I) *si F est de la forme $\exists x_0 G(x_0, x_1, \cdots, x_k)$, alors $v \models F$ ssi pour un certain élément $a_0 \in M$, on a $v' \models G$, où v' est la valuation telle que $v'(x_0) = a_0$, et $v'(x) = v(x)$ pour tout $x \neq x_0$.*

Exemple 5.20

– *La formule $F(x)$ définie par $\forall y R(x, y)$ est vraie dans la structure $\mathcal{N}$ pour 0, mais fausse pour les autres entiers.*
– *La formule $G(x)$ définie par $\exists y x = f(y)$ est vraie dans la structure $\mathcal{N}$ pour les entiers disctincts de 0 et fausse pour 0.*
– *La formule close $\forall x \forall z \exists y (x = c \wedge g(h(x, y, z) = c)$ du langage $\mathcal{L}_2$ est vraie dans $(\mathbb{R} \leq, s, +, \times, 0, 1)$ et fausse dans $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$.*

Dans le cas où la valuation v satisfait la formule F, on dit aussi que F est *valide* en v. Dans le cas contraire, on dit que F est *fausse* en v.

Définition 5.14 (Modèle d'une formule) *Pour une formule F close, la satisfaction de F dans une structure $\mathfrak{M}$ ne dépend pas de la valuation v. Dans le cas où la formule F est vraie, on dit que la structure $\mathfrak{M}$ est un modèle de F, ce que l'on note $\mathfrak{M} \models F$.*

Exercice 5.4. *Soit Σ une signature constitutée d'une relation binaire R et du prédicat $=$. Ecrire une formule qui est valide si et seulement si R est un ordre (on pourra supposer que $=$ s'interpréte par l'égalité).*

5.3.4 Substitutions

Définition 5.15 (Substitution dans un terme) *Etant donné un terme t et une variable x apparaissant dans ce terme, on peut remplacer toutes les occurences de x par un autre terme t'. Le nouveau terme est dit obtenu par* substitution *de t' à x dans t, et est noté $t(t'/x)$.*

Exemple 5.21 *Le résultat de la substitution de $f(h(u,y))$ à x dans le terme $g(y, h(c,x))$ est $g(y, h(c, f(h(u,y))))$. Le résultat de la substitution de $g(x,z)$ à y dans ce nouveau terme est*

$$g(g(x,z), h(c, f(h(u, g(x,z))))).$$

Pour effectuer une subtitution d'un terme à une variable libre dans une formule, il est nécessaire de prenre quelques précautions. Sinon, la signification de la formule peut être complétément modifiée par le phénomène de capture de variable.

Exemple 5.22 *Soit $F(x)$ la formule $\exists y(g(y,y) = x)$. Dans la structure $\mathcal{N}$ où g est interprétée par l'addition la signification de $F(x)$ est claire : $F(x)$ est vraie en x si et seulement si x est pair.*

Si l'on remplace la variable x par z, la formule obtenue possède la même signification que la formule $F(x)$ (au renommage près de la variable libre) : : $F(z)$ est vraie en z si et seulement si z est pair.

Mais si l'on remplace x par y, la formule obtenue $\exists y(g(y,y) = y)$ est une formule close qui est vraie dans la structure $\mathcal{N}$. La variable x a été remplacée par une variable qui est quantifiée dans la formule F.

Définition 5.16 (Substitution) *La* Substitution *d'un terme t à une variable libre x dans une formule F est obtenue en remplaçant toutes les occurences libres de cette variable par le terme t, sous réserve que la condition suivante soit vérifiée : pour chaque variable y apparaissant dans t, x n'a pas d'occurence libre qui se trouve dans une sous-formule de F commençant par une quantification $\forall$ ou $\exists$. Le résultat de cette substitution, si elle est possible, est notée $F(t/x)$.*

Exemple 5.23 *Le résultat de la substitution du terme $f(z)$ à la variable x dans la formule $F(x)$ donnée par*

$$(R(c,x) \wedge \neg x = c) \wedge (\exists y g(y,y) = x))$$

est la formule

$$(R(c, f(z)) \wedge \neg f(z) = c) \wedge (\exists y g(y,y) = f(z))).$$

Proposition 5.2 *Si F est une formule, x une variable libre dans F, et t un terme tel que la substitution de t à x dans F soit définie, alors les formules $(\forall x F \Rightarrow F(t,x))$ et $(F(t/x) \Rightarrow \exists x F)$ sont valides.*

Démonstration : On montre par induction sur la formule F que la satisfaction de la formule $F(t/x)$ par la valuation v est équivalente à celle de la formule $F(x)$ par la valuation v_1 où v_1 est obtenue à partir de v en donnant à x l'interprétation de t pour la valuation v.

Les seuls cas qui nécessitent une justification sont ceux où la formule F est de la forme $\forall G$ et $\exists G$. D'après l'hypothèse sur la substitution de t à x, la quantification considérée porte sur une variable y distincte à la fois de x et de toutes les variables de t. Il suffit donc d'examiner la satisfaction de la formue $G(t/x)$ par une valuation v' égale à v sauf sur y. Par l'hypothèse d'induction sur G, la formule $G(t/x)$ est satisfaite par v' si et seulement si G est satisfaite par la valuation v'_1 où v'_1 est obtenue à partir de v' en donnant à x l'interprétation de t pour la valuation v' : en effet, v et v' sont égales sur toutes les variables apparaissant dans le terme t. $\square$

5.4 Équivalence. Formes normales

5.4.1 Formules équivalentes

Définition 5.17 *Soit $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ une signature.*

- *Une structure $\mathfrak{M}$ satisfait la formule $F(x_1, \cdots, x_k)$ si elle satisfait la formule close $\forall x_1 \cdots \forall x_k F(x_1, \cdots, x_k)$. Cette dernière formule est appelée* la clôture universelle de F.
- *Une formule close F est dite* valide *si elle est satisfaite par toute structure $\mathfrak{M}$.*
- *Une formule F est dite* valide *si sa clôture universelle est valide.*
- *Deux formules F et G sont équivalentes si pour toute structure, et pour toute valuation v elle prennent la même valeur de vérité. On note $F \equiv G$ dans ce cas.*

Exercice 5.5. *Montrer que la relation $\equiv$ est une relation d'équivalence.*

Proposition 5.3 *Soit F une formule. On a les équivalences suivantes :*

$$\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$$

$$\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$$

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Proposition 5.4 *Supposons que la variable x n'est pas libre dans la formule G. Soit*

F une formule. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x G &\equiv \exists x G \equiv G && (5.3)\\
(\forall x F \vee G) &\equiv \forall x (F \vee G) && (5.4)\\
(\forall x F \wedge G) &\equiv \forall x (F \wedge G) && (5.5)\\
(\exists x F \vee G) &\equiv \exists x (F \vee G) && (5.6)\\
(\exists x F \wedge G) &\equiv \exists x (F \wedge G) && (5.7)\\
(G \wedge \forall x F) &\equiv \forall x (G \wedge F) && (5.8)\\
(G \vee \forall x F) &\equiv \forall x (G \vee F) && (5.9)\\
(G \wedge \exists x F) &\equiv \exists x (G \wedge F) && (5.10)\\
(G \vee \exists x F) &\equiv \exists x (G \vee F) && (5.11)\\
(\forall x F \Rightarrow G) &\equiv \exists x (F \Rightarrow G) && (5.12)\\
(\exists x F \Rightarrow G) &\equiv \forall x (F \Rightarrow G) && (5.13)\\
(G \Rightarrow \forall x F) &\equiv \forall x (G \Rightarrow F) && (5.14)\\
(G \Rightarrow \exists x F) &\equiv \exists x (G \Rightarrow F) && (5.15)
\end{aligned}$$

Chacune des équivalences étant en fait assez simple à établir, mais fastidieuse, nous laissons les preuves en exercice.

Exercice 5.6. *Prouver la proposition 5.4.*

Exercice 5.7. *Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Si non, celle de gauche implique-t-elle celle de droite ?*

1. $\neg(\exists x P(x))$ *et* $(\forall x \neg P(x))$
2. $(\forall x P(x) \wedge Q(x))$ *et* $((\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)))$
3. $((\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)))$ *et* $(\forall x P(x) \vee Q(x))$
4. $(\exists x P(x) \vee Q(x))$ *et* $((\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)))$
5. $(\exists x P(x) \wedge Q(x))$ *et* $((\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)))$
6. $(\exists x \forall y P(x, y))$ *et* $(\forall y \exists x P(x, y))$

5.4.2 Forme normale prénexe

Définition 5.18 (Forme prénexe) *Une formule F est dite* en forme prénexe *si elle est de la forme*

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n F'$$

où chacun des Q_i est soit un quantificateur $\forall$, soit un quantificateur $\exists$, et F' est une formule qui ne contient aucun quantificateur.

Proposition 5.5 *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G.*

Démonstration : Par induction structurelle sur F.

Cas de base. Si F est de la forme $R(t_1, \cdots, t_n)$, pour un symbole de relation R, alors F est sous forme prénexe.

Cas inductif :

- si F est de la forme $\forall x G$ ou $\exists x G$, par hypothèse d'induction G est équivalente à G' prénexe et donc F est équivalent à $\forall x G'$ ou $\exists x G'$ qui est prénexe.
- si F est de la forme $\neg G$, par hypothèse d'induction G est équivalente à G' prénexe de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n G''$. En utilisant les équivalences de la proposition 5.3, F est équivalente à $Q'_1 x_1 Q'_2 x_2 \cdots Q'_n x_n \neg G''$, en prenant $Q'_i = \forall$ si $Q_i = \exists$ et $Q'_i = \exists$ si $Q_i = \forall$.
- Si F est de la forme $(G \wedge H)$ par hypothèse d'induction G et H sont équivalentes à des formules G' et H' en forme prénexe. En appliquant les équivalences (5.4) à (5.11), on peut faire "remonter" les quantificateurs en tête de formule : on doit toutefois procéder avec soin, car si par exemple $F = (F_1 \wedge F_2) = ((\forall x F'_1) \wedge F'_2)$ avec x libre dans F'_2, nous devons d'abord renommer la variable x dans F_1 en remplaçant x par une nouvelle variable z n'apparaissant ni dans F_1 ni dans F'_2, de façon à bien pouvoir utiliser l'équivalence dont on a besoin parmi les équivalences (5.4) à (5.11).
- Les autres cas se traitent selon le même principe, en utilisant les équations des deux propositions précédentes.

□

En utilisant les équivalences similaires à celles écrites dans le calcul propositionnel, on peut même aller plus loin :

Proposition 5.6 *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G, où F' est en forme normale conjonctive.*

Proposition 5.7 *Toute formule F est équivalente à une formule prénexe G, où F' est en forme normale disjonctive.*

Nous laissons à notre lecteur le soin d'imaginer ce que veut bien vouloir dire forme normale conjonctive et disjonctive pour une formule sans quantificateur de la logique du premier ordre (Réponse pour forme normale conjonctive : F', la formule sans quantificateur, est soit une clause soit une conjonction de clauses, une clause étant une disjonction de littéraux, et un littéral soit une formule atomique ou une négation d'une formule atomique).

Exercice 5.8. *Déterminer une formule prénexe équivalente à*

$$(\exists x P(x) \wedge \forall x(\exists y Q(y) \Rightarrow R(x))).$$

Exercice 5.9. *Déterminer une formule prénexe équivalente à*

$$(\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y (R(x,y) \wedge \forall z (Rxz \Rightarrow (Ryz \vee y = z))))$$

et à

$$\forall x \forall y ((R(x,y) \wedge \neg x = y) \Rightarrow \exists z (y = g(x, h(z,z)))).$$

5.5 Notes bibliographiques

Lectures conseillées Pour aller plus loin sur les notions évoquées dans ce chapitre, nous suggérons la lecture de [Cori and Lascar, 1993], [Dowek, 2008] et [Lassaigne and de Rougemont, 2004].

Bibliographie Ce chapitre a été rédigé en s'inspirant essentiellement des ouvrages [Cori and Lascar, 1993] et [Lassaigne and de Rougemont, 2004].

Index

Bibliographie

[Cori and Lascar, 1993] Cori, R. and Lascar, D. (1993). *Logique mathématique. Volume I.* Mason.

[Dowek, 2008] Dowek, G. (2008). *Les démonstrations et les algorithmes*. Polycopié du cours de l'Ecole Polytechnique.

[Lassaigne and de Rougemont, 2004] Lassaigne, R. and de Rougemont, M. (2004). *Logic and complexity*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer.