

Des algorithmes “efficaces” ?

- ▶ Les mesures d’efficacité sont des fonctions des données d’entrée.
- ▶ Pour évaluer le temps d’exécution d’un algorithme (par exemple un tri) sur une donnée d (par exemple un ensemble d’entiers à trier), on calcule le nombre d’opérations élémentaires effectuées pour traiter la donnée d .
- ▶ on cherche souvent à évaluer le nombre d’opérations nécessaires pour traiter les données qui ont une certaine “taille”.
- ▶ Il existe souvent un paramètre naturel n qui est un estimateur raisonnable de la taille d’une donnée.

Notations de Landau

- ▶ Ordre de grandeur des temps d’exécution (ou de taille mémoire) quand n devient très grand.
- ▶ $f(n) = O(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et B telles que

$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq Bg(n)$$

Ce qui signifie que f ne croît pas plus vite que g .

- ▶ Un algorithme en $O(1)$ = ensemble constant d’opérations élémentaires
- ▶ Algorithme linéaire quand il utilise $O(n)$ opérations élémentaires.
- ▶ Il est polynomial si il existe une constante a telle que le nombre total d’opérations élémentaires est $O(n^a)$.

Notations de Landau

- ▶ $f(n) = \Omega(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et B telles que

$$\forall n \geq n_0, f(n) \geq Bg(n)$$

- ▶ $f(n) = \Theta(g(n))$ si et seulement si il existe trois constantes positives n_0 , B et C telles que

$$\forall n \geq n_0, Bg(n) \leq f(n) \leq Cg(n)$$

Des mesures

- ▶ “pire cas” = nombre d’opérations avec les données qui mènent à un nombre maximal d’opérations. Soit donc

$$\text{pire cas} = \max_{d \text{ donnée de taille } n} C(d)$$

où $C(d)$ est le nombre d’opérations élémentaires pour exécuter l’algorithme sur d .

- ▶ “en moyenne” (n’a de sens que si l’on dispose d’une hypothèse sur la distribution des données)

$$\text{en moyenne} = \sum_{d \text{ donnée de taille } n} \pi(d)C(d)$$

où $\pi(d)$ est la probabilité d’avoir en entrée une instance d parmi toutes les données de taille n .

Ces notions s’étendent à la consommation mémoire : Complexité spatiale (maximale ou moyenne).

Recherche Dichotomique

Soit un tableau T de n entiers *triés*. On cherche à tester si un entier v se trouve dans le tableau.

```
static boolean trouve(int[] T, int v, int min, int max){
    if(min ≥ max) // vide
        return false;
    int mid = (min + max) / 2;
    if (T[mid] == v)
        return true;
    else if (T[mid] > v)
        return trouve(T, v, min, mid);
    else
        return trouve(T, v, mid + 1, max);
}
```

Le nombre total d'opérations est proportionnel au nombre de comparaisons $C(n)$: $C(n) = 1 + C(\frac{n}{2})$. Soit donc, $C(n) = O(\log n)$.

Tours de Hanoi

But : Déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire. Attention, on ne peut déplacer qu'un disque à la fois, et on ne peut placer un disque que sur un disque plus grand ou sur un emplacement vide.

Si l'on sait déplacer une tour de taille n de la tour *ini* vers *dest*, alors pour déplacer une tour de taille $n + 1$ de *ini* vers *dest*, déplacer une tour de taille n de *ini* vers *temp*, un disque de *ini* vers *dest* et finalement la tour de hauteur n de *temp* vers *dest*.

Tours de Hanoi

```
public static void hanoi(int n, int ini, int temp, int dest){
    if (n == 1){ // on sait le faire
        System.out.println("deplace" + ini + " " + dest);
        return;
    } // sinon recursion
    hanoi(n - 1, ini, dest, temp);
    System.out.println("deplace" + ini + " " + dest);
    hanoi(n-1, temp, ini, dest);
}
```

Notons $C(n)$ le nombre d'instructions élémentaires pour calculer $\text{hanoi}(n, \text{ini}, \text{temp}, \text{dest})$. Nous avons alors $C(n + 1) \leq 2C(n) + \lambda$, où λ est une constante. Tour de Hanoi est exponentielle.

Recherche d'un nombre dans un tableau, complexité en moyenne

On suppose que les éléments d'un tableau T de taille n sont des nombres entiers distribués de façon équiprobable entre 1 et k (une constante). Considérons maintenant l'algorithme qui cherche une valeur v dans T .

```
static boolean trouve(int[] T, int v) {
    for (int i = 0; i < T.length; i++)
        if (T[i] == v)
            return true;
    return false;
}
```

La complexité dans le pire cas est clairement $O(n)$. Quelle est la complexité en moyenne ?

Fusionner deux listes triées

- ▶ Deux listes $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ triées que l'on souhaite fusionner (en respectant le tri)
- ▶ (1, 6, 12, 67, 98, 454), (5, 6, 11, 32, 123, 324, 444) \rightarrow (1, 5, 6, 6, 11, 12, 32, 67, 98, 123, 324, 444, 454)
- ▶ Idée 1 : Concaténer puis trier.
 - ▶ Très mauvaise idée. Pourquoi ?
- ▶ Mieux :
 - ▶ Construire une liste vide \mathcal{L}
 - ▶ Tant que les deux listes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ne sont pas vides :
 - ▶ Choisir des deux valeurs de tête la plus petite
 - ▶ L'enlever de la sous-liste et l'ajouter à \mathcal{L}

Complexité ?

Fusionner deux listes triées

```
static Liste fusion(Liste l1, Liste l2) {
    if (l1 == null)
        return l2;
    if (l2 == null)
        return l1;
    if (l1.contenu < l2.contenu)
        return new Liste(l1.contenu, fusion(l1.suivant, l2));
    else
        return new Liste(l2.contenu, fusion(l1, l2.suivant));
}
```

Destructif ou pas ?

Tri par fusion

Quelques idées simples :

- ▶ Les listes de moins de 2 éléments sont triées
- ▶ Les autres peuvent être coupées en 2 sous-listes de longueurs égales
- ▶ Les 2 sous-listes sont triées récursivement
- ▶ puis fusionnées

Complexité :
 $O(n \log n)$.
Von Neuman 1945
(©USPS)



Le tri par fusion par l'exemple

```
tri 69 85 34 24 40 77 64 22
tri 69 85 34 24
  tri 69 85
    tri 69
    tri 85
  fusion 69 et 85 -> 69 85
tri 34 24
  tri 34
  tri 24
  fusion 34 et 24 -> 24 34
fusion 69 85 et 24 34 -> 24 34 69 85
tri 40 77 64 22
  tri 40 77
    tri 40
    tri 77
  fusion 40 et 77 -> 40 77
tri 64 22
  tri 64
  tri 22
  fusion 64 et 22 -> 22 64
fusion 40 77 et 22 64 -> 22 40 64 77
fusion 24 34 69 85 et 22 40 64 77 -> 22 24 34 40 64 69 77 85
```

Tri par fusion

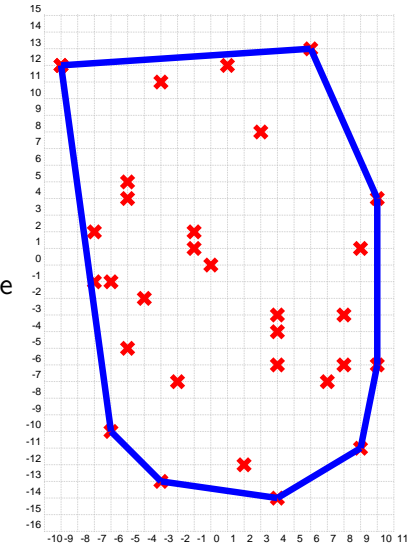
```
static Liste tri(Liste l) {
    int n = longueur(l);
    if (n ≤ 1)
        return l;
    Liste l1 = l;
    for (int i = 0; i < n / 2 - 1; i++)
        l = l.suivant;
    Liste l2 = l.suivant;
    l.suivant = null;
    return fusion(tri(l1), tri(l2));
}
```

Inconvénients :

- ▶ Espace mémoire
- ▶ Pour 3000 valeurs, 1.3 s vs. 0.2 s (pour Arrays.sort)
- ▶ **Complexité ?**

Calculer l'enveloppe convexe d'un nuage de points

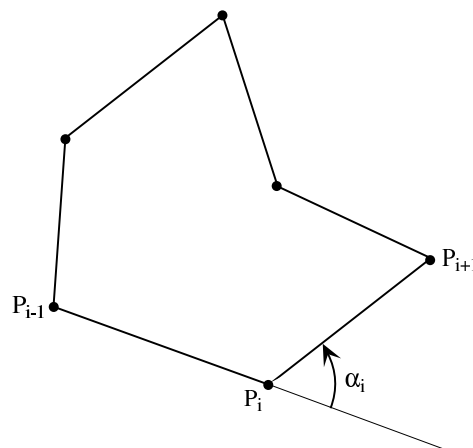
- ▶ Définir et manipuler des points
- ▶ Définir et manipuler des polygones (insertion, suppression d'un sommet)
- ▶ Calculer l'enveloppe convexe d'un nuage
- ▶ **Hypothèses**
 - ▶ Les sommets sont tous distincts
 - ▶ Trois sommets quelconques ne sont pas alignés (\neq figure)



Polygones : Définitions

Un sommet P_i est dit **convexe** ssi
 $\alpha_i = (\overrightarrow{P_{i-1}P_i}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}) \geq 0$.

Le polygone est dit **convexe** ssi tous ses sommets le sont.



Polygones, Points : modèle & objets

- ▶ Point du plan = couple (x, y) ; nuage = liste de sommets
- ▶ Polygone = liste ordonnée de sommets
- ▶ Sommet = 1 point

```
class Point {
    double x, y;
    Point (int x, int y) {
        this.x = ((double) x);
        this.y = ((double) y);
    }
    Point (double x, double y) {
        this.x = x;
        this.y = y;
    }
}
```

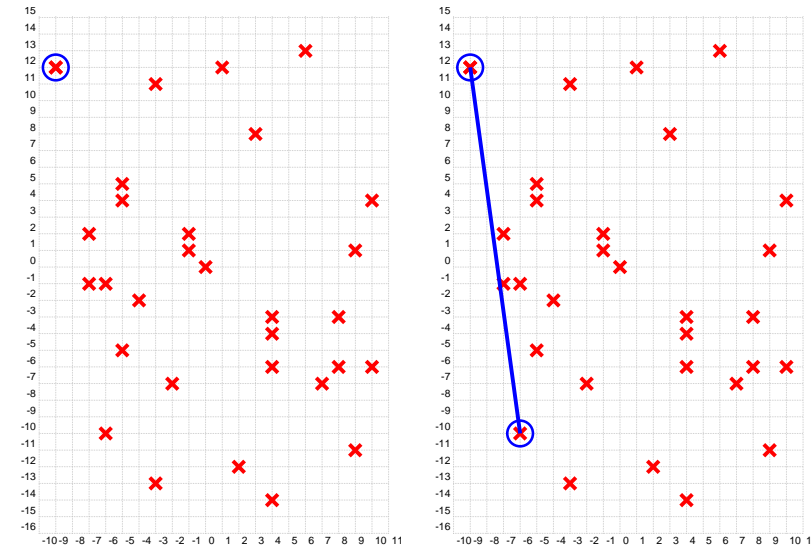
```
class Polygone {
    Polygone suivant; // LA SUITE
    Point s;
    // LE SOMMET
    Polygone(Point p, Polygone l) {
        s = p;
        suivant = l;
    }
    static Polygone
    envConvexe(Polygone p) {
        ???
    }
}
```

Algorithme de l'enveloppement

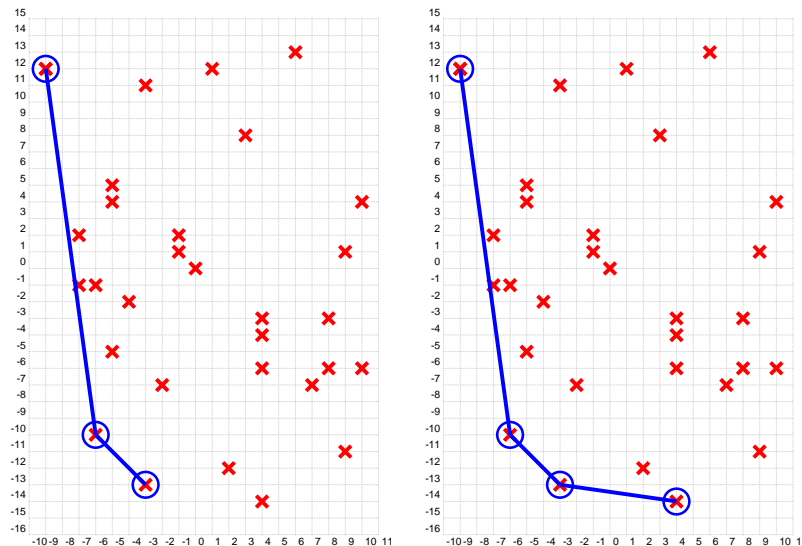
- ▶ Partir d'un point dont on sait qu'il est sur l'enveloppe convexe.
 - ▶ Ex : Un point d'abscisse minimale
- ▶ Envelopper l'ensemble de points en faisant tourner une demi-droite issue de ce point jusqu'à ce qu'elle s'appuie sur un point du nuage.
- ▶ Repartir de ce point jusqu'à retomber sur le point de départ.

Complexité ??

L'enveloppement par l'exemple



L'enveloppement par l'exemple



Algorithme de l'enveloppement

Les étapes

- ▶ Calculer un point P_0 d'abscisse minimale (méthode `premierPoint`)
 - ▶ C'est un point de l'enveloppe
- ▶ Le cas particulier du deuxième point P_1 (méthode `deuxiemePoint`)
 - ▶ Il minimise l'angle $(-\vec{j}, \overrightarrow{P_0P_1})$
- ▶ Tant qu'on n'a pas retrouvé le point P_0 (méthode `envConvexe`)
 - ▶ Chercher le point P_{i+1} qui minimise l'angle $(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}})$ (méthode `prochainPoint`)

Algorithme de l'enveloppement : géométrie (classe Point)

```

static double distance(Point p, Point q) {
    double dx = q.x - p.x; double dy = q.y - p.y;
    return Math.sqrt(dx * dx + dy * dy);
}
static double mes(Point p0, Point p1, Point p2) { // mesurer l'angle
    double d01 = distance(p0, p1); double d12 = distance(p1, p2);
    double pscal = (p1.x - p0.x) * (p2.x - p1.x)
        + (p1.y - p0.y) * (p2.y - p1.y);
    double alpha = Math.acos(pscal / (d01 * d12));
    double pvect = (p1.x - p0.x) * (p2.y - p1.y)
        - (p1.y - p0.y) * (p2.x - p1.x);
    if (pvect < 0) alpha = - alpha;
    return alpha;
}
static double angleVertical(Point p1, Point p2) {
    return mes(new Point(p1.x, p1.y -1), p1, p2);
}

```

Algorithme de l'enveloppement : le 1er point

Calculer un point d'abscisse minimale

```

static Point premierPoint(Polygone nuage) {
    Point le1er = null;
    for (Polygone i = nuage; i ≠ null; i = i.suivant)
        if ((le1er == null) || (i.s.x < le1er.x)) le1er = i.s;
    return le1er;
}

```

Attention au test (le1er == **null**)

Algorithme de l'enveloppement : le 2ème point

Calculer un point qui minimise l'angle $(-\vec{j}, \overrightarrow{P_0P_1})$

```

static Point deuxièmePoint(Point le1er, Polygone nuage) {
    Point le2eme = null;
    for (Polygone i = nuage; i ≠ null; i = i.suivant)
        if ((i.s ≠ le1er) &&
            ((le2eme == null) ||
             Point.angleV(le1er, le2eme) > Point.angleV(le1er, i.s)))
            le2eme = i.s;
    return le2eme;
}

```

Algorithme de l'enveloppement : le ième point

```

static Point prochainPoint(Point avDer, Point der, Polygone nuage) {
    Point pchn = null;
    for (Polygone i = nuage; i ≠ null; i = i.suivant)
        if ((i.s ≠ avDer && i.s ≠ der) &&
            (pchn == null ||
             Point.mes(avDer, der, i.s) < Point.mes(avDer, der, pchn)))
            pchn = i.s;
    return pchn;
}

```

Algorithme de l'enveloppement : Itération principale

```

static Polygone envConvexe(Polygone nuage) {
    Point le1er = premierPoint(nuage);
    Point le2eme = deuxiemePoint(le1er, nuage);
    Polygone env = new Polygone(le2eme, new Polygone(le1er, null));
    for (Point pch = prochainPoint(env.suivant.s, env.s, nuage);
        pch ≠ le1er;
        pch = prochainPoint(env.suivant.s, env.s, nuage))
        env = new Polygone(pch, env);
    return env;
}

```

Aujourd'hui

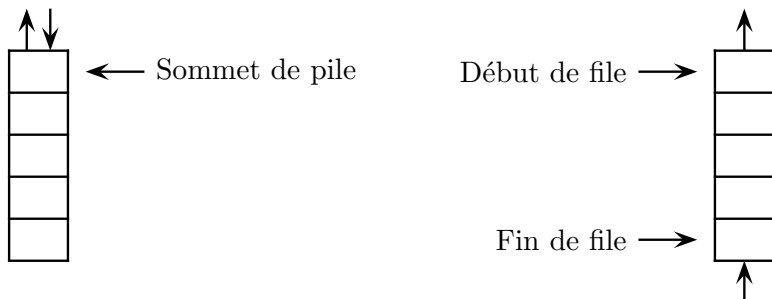
Complexité

Les listes

Piles et Files

Pile, file : définitions

- ▶ Une **pile** est une structure de données où les insertions et les suppressions se font toutes du même côté.
 - ▶ LIFO (last-in first-out).
- ▶ Une **file** est une structure où les insertions se font d'un côté et les suppressions de l'autre côté. Une telle structure est aussi appelée FIFO (first-in first-out).
 - ▶ FIFO (first-in first-out).



Pile, file : Utilité

Quelques exemples en informatique

- ▶ Pile d'appels dans un programme
- ▶ Pile d'annulation des actions dans un éditeur de texte
- ▶ File d'attente devant une imprimante
- ▶ Plus généralement la communication entre des systèmes est toujours assurée par des piles ou des files d'attente

Ce sont aussi des outils utilisés et étudiés en RO stochastique.

Pile, file : Ce qu'on veut en faire

- ▶ **créer** une pile/file vide.
- ▶ **tester** si une pile/file est vide.
- ▶ **ajouter** un élément à la pile/file.
 - ▶ au sommet de la pile
 - ▶ en fin de file
- ▶ **trouver** l'élément à dépiler/défiler
 - ▶ au sommet de la pile
 - ▶ en début de file
- ▶ **supprimer** un élément de la pile / file
 - ▶ au sommet de la pile
 - ▶ en début de file

Les files

Comment coder une file ?

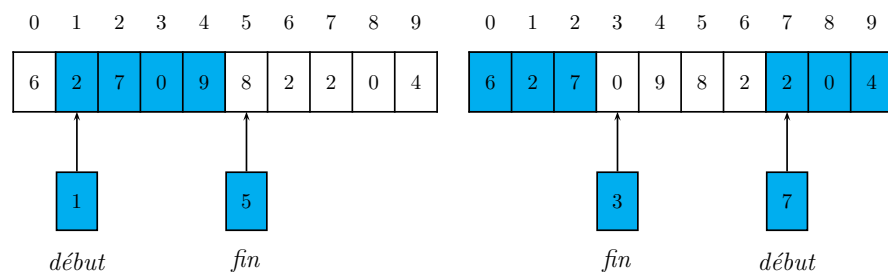
- ▶ Par un tableau
 - ▶ Limitation (taille du tableau)
 - ▶ Gestion des indices complexes
- ▶ Par une liste chaînée

Les deux implantations se présentent de la même manière à un utilisateur d'une classe File. On fait "abstraction" de l'implantation effective.

Les files avec un tableau

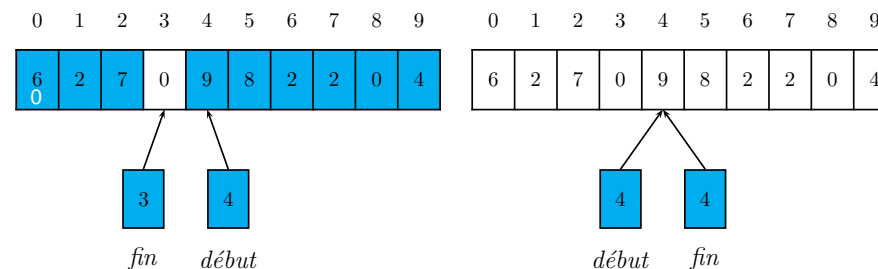
Idée simple : Utiliser un tableau pour enregistrer les éléments de la file.

- ▶ Attention : Le début **ET** la fin de la file changent
- ▶ Utilisation d'un tableau **contenu** "circulaire" de taille $\max F$
 - ▶ Les éléments de la file sont ceux compris entre début et fin modulo $\max F$



Les files avec un tableau : File vide, file pleine

- ▶ Une file vide : $\text{début} = \text{fin}$
- ▶ Une file pleine : $\text{fin} + 1 \equiv \text{début} \pmod n$
- ▶ On perd ainsi une place dans le tableau



Les files avec un tableau

```

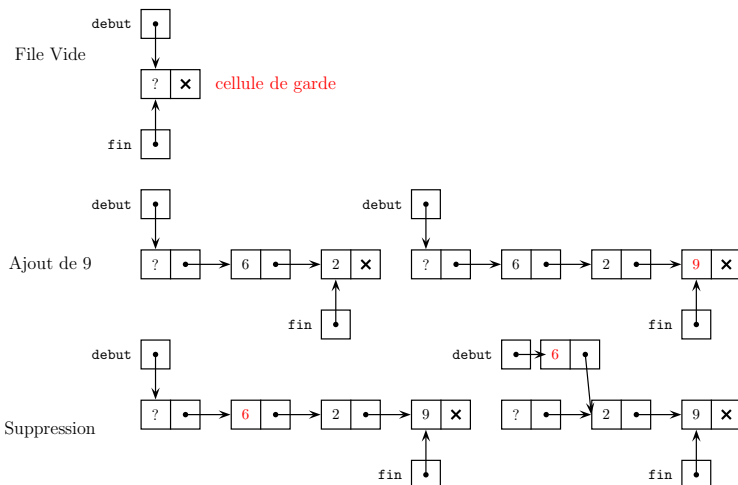
class File {
    static final int maxF = 10;
    int début, fin;
    int[] contenu;
    File() {
        début = 0;
        fin = 0;
        contenu = new int[maxF];
    }
    boolean estVide() {
        return début == fin;
    }
    boolean estPleine() {
        return (fin + 1) % maxF == début;
    }
    void vider() {
        début = fin;
    }
    int valeur() {
        return contenu[début];
    }
    void supprimer() {
        début = (début + 1) % maxF;
    }
    void ajouter(int x) {
        contenu[fin] = x;
        fin = (fin + 1) % maxF;
    }
}

```

Les files avec une liste chaînée gardée

- ▶ On conserve à la fois une référence sur le premier et sur le dernier élément de la liste
- ▶ **Les ajouts se font à la fin de la liste**
 - ▶ il faut donc modifier à chaque ajout la référence sur le dernier élément de la liste
- ▶ Les opérations de **suppression** concernent la **tête** de la liste
- ▶ Pour simplifier le codage, on utilise une cellule de garde
 - ▶ La dernière cellule de la liste existe toujours (→ ajout simplifié)

Les files avec une liste chaînée gardée



Les files avec une liste chaînée gardée

```

class File {
    Liste début;
    Liste fin;
    File () {
        Liste garde = new Liste();
        début = garde;
        fin = garde;
    }
    static boolean estVide (File f) {
        return f.début == f.fin;
    }
    static void ajouter (int x, File f) {
        if (estVide (f))
            throw new Error("VIDE");
        Liste a = new Liste (x, null);
        f.fin.suivant = a;
        f.fin = a;
    }
    static void supprimer (File f) {
        if (estVide (f))
            throw new Error("VIDE");
        f.début = f.début.suivant;
    }
}

```

Un exemple : Simuler une file d'attente

- ▶ Attente dans une file pour un service
- ▶ Phénomène stochastique :
 - ▶ Arrivée aléatoire des clients
 - ▶ Temps de service aléatoire
 - ▶ Patience limitée des clients (seuil de tolérance aléatoire)
 - ▶ ...

Les arrivées, les temps d'attente, etc., sont des variables aléatoires qui suivent des lois de probabilité données. **On cherche des caractéristiques du systèmes (temps d'attente moyen, ratio de clients exaspérés, etc).**

- ▶ Étude théorique des files d'attente (RO stochastique, résultats analytiques)
- ▶ Simulation informatique (seule méthode quand trop complexe)

Un exemple : Simuler une file d'attente

- ▶ Un unique guichet ouvert 8h00 ($8 * 3600 = 28800$ secondes) consécutives.
- ▶ Les clients arrivent et font la queue. La probabilité d'arrivée d'un nouveau client sur un intervalle $[t, t + 1)$ est p (elle ne dépend pas de ce qui s'est passé avant l'instant t et la probabilité d'arrivée de plusieurs clients dans $[t, t + 1)$ est "négligeable" → **Poisson**).
- ▶ Temps de service (loi uniforme sur $[30, 300)$).
- ▶ Chaque client est plus ou moins patient (le temps après lequel il part sans être servi → loi uniforme sur $[120, 1800)$).

OBJECTIF : Calculer le ratio de clients qui partent sans être servis en fonction de p .

Simuler une file d'attente : Le client & la file

```
class Client {
    int arrivée;
    int seuil;
    Client(int arrivée, int seuil) {
        this.arrivée = arrivée;
        this.seuil = seuil;
    }
}
class File {
    static final int maxF = 1000;
    int début, fin;
    Client[] contenu;
    File() {
        début = 0;
        fin = 0;
        contenu = new Client[maxF];
    } ...
}
```

Simuler une file d'attente : La simulation

Un algorithme naïf : simulation discrète (seconde par seconde)

- ▶ À chaque seconde t , faire un tirage aléatoire pour simuler l'arrivée d'un client
 - ▶ Si un client arrive, "l'enfiler" et tirer aléatoirement son seuil d'attente
- ▶ Conserver dans une variable `libre` la prochaine date à laquelle le guichet se libère
- ▶ Quand un client est disponible et que le guichet est libre,
 - ▶ "défiler" le client
 - ▶ Vérifier que le client n'est pas parti
 - ▶ tirer aléatoirement un temps de traitement,
 - ▶ mettre à jour `libre`

Simuler une file d'attente : La simulation

On dispose

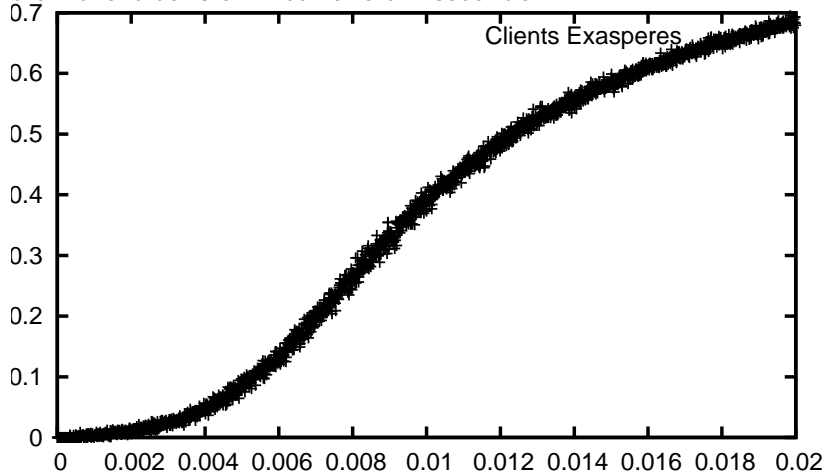
- ▶ d'un générateur aléatoire
 - ▶ `RandGen.rnd()` renvoie un réel dans $[0, 1)$ tiré aléatoirement
 - ▶ `RandGen.rnd(a)` renvoie un entier dans $[0, a)$ tiré aléatoirement
 - ▶ `RandGen.rnd(a, b)` renvoie un entier dans $[a, b)$ tiré aléatoirement
- ▶ d'un module qui permet de lancer plusieurs simulations et de faire des moyennes
- ▶ de `gnuplot` qui permet d'afficher des tableaux de données

Simuler une file d'attente : La simulation

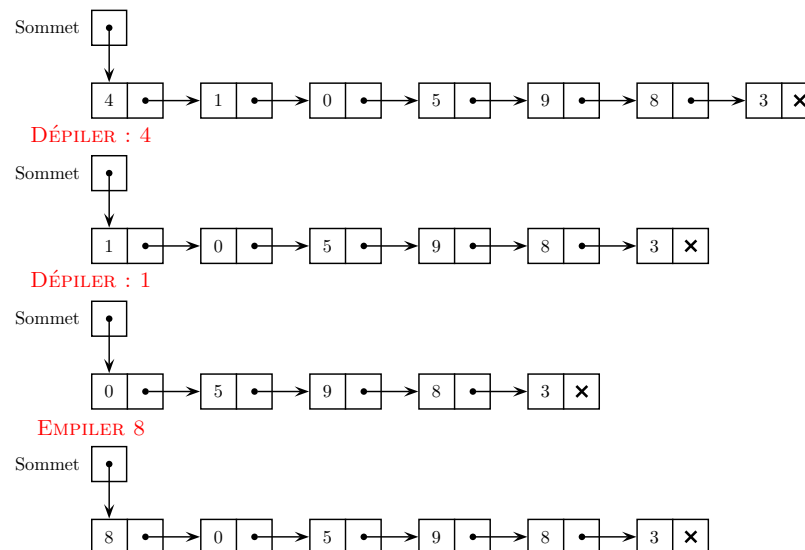
```
File f = new File (); int libre = 0;
int clientsArrivés = 0; int clientsExaspérés = 0;
for (int t = 0; t < tMax; t++) {
    if (RandGen.rnd() ≤ probArriveeT) {
        clientsArrivés ++;
        f.ajouter(new Client(t, RandGen.rnd(seuilMin, seuilMax)));
    }
    if (libre ≤ t) {
        Client c = null;
        while (! f.estVide()) { // exaspérés -> partis
            c = f.défiler();
            if (t - c.arrivée ≤ c.seuil)
                break;
            clientsExaspérés ++;
            c = null;
        } // maintenant le client à servir est c
        if (c ≠ null) libre = t + RandGen.rnd(serviceMin, serviceMax); }}
```

Simuler une file d'attente

Le ratio de clients exaspérés en fonction de la probabilité d'arrivée d'un client dans un intervalle d'1 seconde



Comment coder une pile ? avec une liste



Comment coder une pile ?

Très simplement avec une liste (ou un tableau).

```

class Liste {
    int valeur;
    Liste suivant;
    Liste(int v, Liste s) {
        valeur = v;
        suivant = s;
    }
}

class Pile {
    Liste l;
    public Pile() {
        l = null;
    }
}

public static boolean estVide(Pile p) {
    return p.l == null;
}

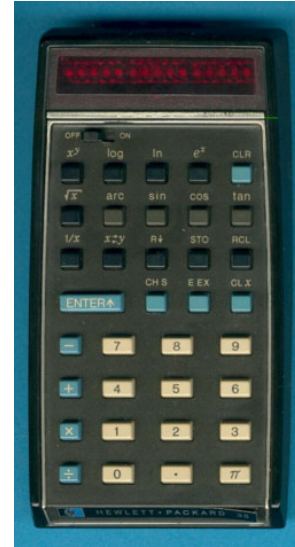
void vider() {
    l = null;
}

static void ajouter(Pile p, int a) {
    p.l = new Liste(a, p.l);
}

static int retirer(Pile p) {
    int a = p.l.valeur;
    p.l = p.l.suivant;
    return a;
}

```

Un investissement : la HP35 ou la fin de la règle à calcul



- ▶ janvier 1972 : la HP35, 1ère calculatrice de poche scientifique pour \$ 395.
- ▶ Très bon investissement (\$ 515 sur ebay 33 ans plus tard)
- ▶ RPN (Reverse Polish Notation)
 - ▶ développée en 1920 par Jan Lukasiewicz (formules sans parenthèses ni de crochets)
 - ▶ Exemple :
(3+5) / (7+6) = ?. "Appuyez sur 3 puis sur la touche ENTER. Appuyez sur 5 puis sur la touche +. Appuyez sur 7, puis sur la touche ENTER. Appuyez sur 6 puis sur la touche +. Appuyez sur la touche de division et la calculatrice vous donne le résultat : 0,62."

La notation Polonaise inverse (RPN)

- ▶ Placer des nombres dans une pile
- ▶ effectuer des opérations sur les 2 nombres situés au sommet de la pile

Évaluation de "4 12 23 7 + + 3 * 121 - * "

```

LIT : 4      Pile : 4
LIT : 12     Pile : 12 4
LIT : 23     Pile : 23 12 4
LIT : 7      Pile : 7 23 12 4
LIT : +      Pile : 30 12 4
LIT : +      Pile : 42 4
LIT : 3      Pile : 3 42 4
LIT : *      Pile : 126 4
LIT : 121    Pile : 121 126 4
LIT : -      Pile : 5 4
LIT : *      Pile : 20

```

RPN

Algorithme : Utiliser une pile pour enregistrer les nombres et traiter les opérateurs "on the fly".

Pour analyser la chaîne de caractères :

- ▶ La classe String permet les opérations usuelles sur les chaînes de caractères.
- ▶ Attention, les objets de la classe String sont **immuable**s (variante destructrice des chaînes de caractères, la classe StringBuffer)
- ▶ Quelques méthodes utiles de la classe String : **int** length(), **char** charAt(**int** index), **boolean** equals(String s)

