

Cours 6: Quelques utilisations des arbres

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

INF421-a

Bases de la programmation et de l'algorithmique

Aujourd'hui

Arbres de syntaxe abstraite

Union-Find

Arbres couvrant de poids minimal

Problème du voyageur de commerce

Qu'est ce qu'une expression arithmétique?

- Une expression arithmétique est
 - ▶ soit un entier,
 - ▶ soit une opération $e_1 \oplus e_2$ avec $\oplus \in \{+, *, /, -\}$, avec e_1, e_2 des expressions arithmétiques.
- Autrement dit, une expression arithmétique est solution de l'équation réursive

$$E = \mathbb{Z} \sqcup (E \times \{+, -, *, /\} \times E)$$

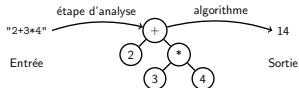
... c'est-à-dire, est un arbre.

- Exemple: $2 + 3 + 4$ correspond à



Arbre de syntaxe abstraite

- On a déjà vu comment évaluer une expression arithmétique:
 - ▶ à partir des arguments de la ligne de commande,
 - ▶ à partir d'une suite d'opérations rentrées une à une.
 - ▶ On aurait pu partir d'une chaîne de caractères comme "2+3*4".
- Plutôt que de travailler directement sur ces entrées, on préfère souvent
 1. d'abord convertir l'entrée (ex: la chaîne de caractères) en un arbre,
 2. et travailler sur l'arbre.



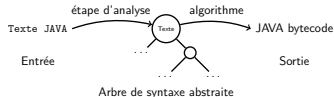
Digression: qu'est ce qu'un programme JAVA

- Un programme .java est un "texte".
- Un "texte" =
 - ▶ une "déclaration de classe ou une instruction import" ("dcii"),
 - ▶ ou une "dcii" suivie d'un texte.
- Une "dcii" =
 - ▶ une "déclaration de classe",
 - ▶ ou une "instruction import".
- Une "déclaration de classe" =
 - ▶ un nom de classe <nom> suivi d'un "bloc d'instructions".
- Un "bloc d'instructions" = une "liste d'instructions".
- Une "liste d'instructions" =
 - ▶ une "instruction",
 - ▶ ou une "instruction" suivie d'une "liste d'instructions".
- Une "instruction" =
 - ▶ une "déclaration de classe",
 - ▶ ou une "déclaration de variable",
 - ▶ ou une "affectation".
- Une "déclaration de variable" =
 - ▶ Un "nom de type" suivi d'une "liste de variables+initialisations".
- ...
- Une "variable+initialisation" =
 - ▶ un "nom de variable",
 - ▶ un "nom de variable" suivi d'une "valeur" d'initialisation.
- ...
- Une "affectation" =
 - ▶ un "nom de variable" suivi d'une "valeur".

5

Digression: Comment on compile

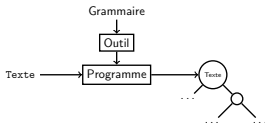
- Bref: un programme est un arbre.
- Comment fonctionne un compilateur JAVA:



6

Pourquoi passer par les arbres de syntaxe abstraite?

- Parce que manipuler un arbre est facile.
- Mais aussi parce que l'on possède des outils qui transforment une description d'un langage (ce que l'on appelle une *grammaire*) en un programme qui produit un arbre à partir d'un texte conforme à cette grammaire.



- Voir cours INF431.

7

Retour sur les expressions arithmétiques

- Coder un arbre de syntaxe abstraite:

```
class Exp {
    final static int INT=0, ADD=1, SUB=2, MUL=3, DIV=4 ;
    int tag ;
    int asInt ; // Utilisé si tag == INT
    Exp e1, e2 ; // Utilisés si tag ∈ {ADD, SUB, MUL, DIV}

    Exp(int i) { tag = INT ; asInt = i ; }

    Exp(Exp e1, int op, Exp e2) {
        tag = op ; this.e1 = e1 ; this.e2 = e2 ; }
}
```

- Construire un arbre de syntaxe abstraite:



```
Exp e= new Exp(new Exp(2),
    Exp.ADD,
    new Exp (new Exp(3),Exp.MUL,new Exp(4)));
```

8

Construire un arbre de syntaxe abstraite

- En s'inspirant de la calculatrice en notation polonaise inverse

```
import java.util.* ;

class Traduit {
public static void main (String [] args) {
Stack<Exp> p = new Stack<Exp> () ;
for (int i = 0 ; i < args.length ; i++) {
String cmd = args[i] ;
if (cmd.equals("+")) {
Exp x = p.pop() ; Exp y = p.pop() ;
p.push(new Exp(y,Exp.ADD, x)) ;
}
else if
... // Même chose pour *,./,-
else
p.push(new Exp(Integer.parseInt(cmd)) ; }
Exp t = p.pop() ;
// ici t est construit.
}}
```

9

Evaluer un arbre

- Evaluer un arbre

```
static int eval(Exp e) {
switch (e.tag) {
case Exp.INT: return e.asInt ;
case Exp.ADD: return eval(e.e1)+eval(e.e2) ;
case Exp.SUB: return eval(e.e1)-eval(e.e2) ;
case Exp.MUL: return eval(e.e1)*eval(e.e2) ;
case Exp.DIV: return eval(e.e1)/eval(e.e2) ;
throw new Error("tag incorrect") ; }
}
```

- Remarque JAVA: sans le "throw new Error" le compilateur n'accepte pas, car il pourrait y avoir des cas sans return.
 - ▶ on pourrait aussi renvoyer une valeur par défaut.

10

Afficher un arbre

- Afficher un arbre en notation infixe:

```
static void Affiche(Exp e) {
switch (e.tag) {
case Exp.INT: System.out.print(e.asInt) ; return ;
case Exp.ADD: case Exp.SUB:
System.out.print('(') ; Affiche(e.e1) ;
System.out.print(e.tag==Exp.ADD?'+' : '-' ) ;
Affiche(e.e2) ; System.out.print(')') ;
return ;
case Exp.MUL: case Exp.DIV:
System.out.print('(') ; Affiche(e.e1) ;
System.out.print(e.tag==Exp.MUL?'*' : '/' ) ;
Affiche(e.e2) ; System.out.print(')') ; } }
```

Affiche: $(1+(2*3))$

- Le poly propose une version qui évite les parenthèses inutiles.
- La notation polonaise inverse s'obtient par un parcours postfixe, et s'appelle donc aussi *notation postfixe*.

11

Aujourd'hui

Arbres de syntaxe abstraite

Union-Find

Arbres couvrant de poids minimal

Problème du voyageur de commerce

12

Travailler sur des partitions: Union-Find

- On souhaite travailler sur les partitions de

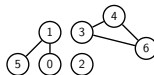
$$E = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

- Etant donnée une partition, on souhaite
 - trouver la classe d'équivalence d'un élément
 - méthode `find`.
 - fusionner deux classes d'équivalence
 - méthode `union`.

13

Exemple d'application

- Comment déterminer les composantes connexes d'un graphe?



- Méthode:
 - On part de la partition où toutes les classes d'équivalence sont des singletons.
 - Pour chaque arête $e = (u, v)$,
 - on fait `union(u, v)`.
 - Deux sommets sont dans la même composante connexe si et seulement si `find(u) == find(v)`.

14

Une solution inefficace

- On représente la partition par un tableau `tab`, tel que `tab[i]` soit le numéro de la classe d'équivalence de l'élément i .

$$P = \{ \{2, 5, 8\}, \{0, 6\}, \{1\}, \{3, 4, 7, 9\} \}$$

classe 1 2 3 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
tab	2	3	1	4	4	1	2	4	1	4

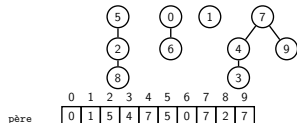
- `Find`: Temps $O(1)$.
- `Union`: Temps $O(n)$.

15

Une solution plus rusée

- On représente la partition par une forêt.
 - Chaque arbre correspond à une classe d'équivalence.
 - La racine de chaque arbre donne un représentant canonique de la classe.
- On représente la forêt par un tableau `père`, tel que `père[i]` est le père de l'élément i , en posant `père[i]=i` pour une racine.
- attention, cette représentation des arbres est rarement judicieuse hors du contexte `union/find`.

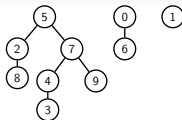
$$P = \{ \{2, 5, 8\}, \{0, 6\}, \{1\}, \{3, 4, 7, 9\} \}$$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
père	0	1	5	4	7	5	0	7	2	7

16

Union des classes de 2 et de 3



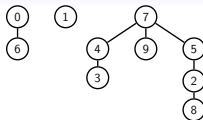
- union(2,3)
- Possibilité 1

```
int find(int x) {  
  while (x ≠ père[x])  
    x = père[x];  
  return x; }
```

```
void union(int x, int y) {  
  int r = find(x);  
  int s = find(y);  
  if (r ≠ s) père[s] = r; }
```

17

Union des classes de 2 et de 3



- union(2,3)
- Possibilité 2

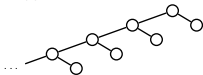
```
int find(int x) {  
  while (x ≠ père[x])  
    x = père[x];  
  return x; }
```

```
void union(int x, int y) {  
  int r = find(x);  
  int s = find(y);  
  if (r ≠ s) père[r] = s; }
```

17

Heuristique 1: Union pondérée

- L'opération Find s'effectue en temps $O(h)$, où h est la hauteur de l'arbre.
- Pire cas: $h = O(n)$.



- Heuristique 1: Lors de l'union de deux arbres, la racine de l'arbre avec le moins de sommets devient fils de la racine de l'autre.

18

Union pondérée

- On maintient un tableau `taille` (initialisé à 1 si l'on part de classes singleton):
 - ▶ si i est une racine, `taille[i]` est le nombre de sommets de l'arbre de racine i .

```
void union(int x, int y) {  
  int r = find(x);  
  int s = find(y);  
  if (r == s) return;  
  if (taille[r] > taille[s]) {  
    père[s] = r;  
    taille[r] += taille[s]; }  
  else {  
    père[r] = s;  
    taille[s] += taille[r]; } }
```

18

Union pondérée

- La hauteur d'un arbre à n sommets créé par une suite d'unions pondérées est $\leq 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.
- Preuve: Par récurrence sur n .
 - ▶ Vrai pour $n = 1$.
 - ▶ Pour un arbre obtenu par union pondérée d'un arbre à m sommets et d'un arbre à $n - m$ sommets, avec $1 \leq m \leq n/2$, sa hauteur est majorée par

$$\max(1 + \lfloor \log_2(n - m) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 m \rfloor).$$

- ▶ Comme
 - $\log_2 m \leq \log_2(n/2) = \log_2 n - 1$,
 - et $\log_2(n - m) \leq \log_2 n$,la hauteur est bien majorée par $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.
- Union et Find sont donc en $O(\log n)$.

20

Heuristique 2: Compresser les chemins

- Heuristique 2: Lorsque l'on remonte du sommet x vers sa racine r , on refait le parcours en faisant de chaque sommet rencontré un fils de r .
- Exemple: Find(8)

```
int findsimple(int x) {  
  while (x != père[x])  
    x = père[x];  
  return x; }
```

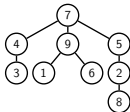
```
int find(int x) {  
  int r = findsimple(x);  
  while (x != père[x]) {  
    int y = père[x];  
    père[x] = r;  
    x = y; }  
  return x; }
```

21

Heuristique 2: Compresser les chemins

- Heuristique 2: Lorsque l'on remonte du sommet x vers sa racine r , on refait le parcours en faisant de chaque sommet rencontré un fils de r .
- Exemple: Find(8)

Partant de



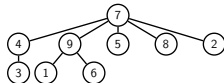
```
int find(int x) {  
  if (x == père[x]) return x;  
  return père[x] = find(père[x]);  
}
```

21

Heuristique 2: Compresser les chemins

- Heuristique 2: Lorsque l'on remonte du sommet x vers sa racine r , on refait le parcours en faisant de chaque sommet rencontré un fils de r .
- Exemple: Find(8)

Résultat final



```
int find(int x) {  
  if (x == père[x]) return x;  
  return père[x] = find(père[x]);  
}
```

21

Complexité de Union/Find

- Théorème [Tarjan] m opérations union ou find sur n éléments, se réalisent en temps $O(n + m\alpha(n))$ où α est une fonction qui croît très très lentement.
- Aucun algorithme linéaire connu.
- On a $\alpha(n) \leq 4$ pour $n \leq 2^{2048}$.
- (Le nombre d'atomes dans l'univers est estimé à 10^{80} .)
- En pratique: c'est comme si c'était linéaire.

22

Complément: définition précise de α

- Soit $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par
 - ▶ $A_0(j) = j + 1;$
 - ▶ $A_k(j) = A_{k-1}^{[j+1]}(j)$ si $k \geq 1$.
- Dans cette définition, $F^{[k]}$ désigne F itérée k fois:
 - ▶ $F^{[0]}(j) = j,$
 - ▶ $F^{[i+1]}(j) = F(F^{[i]}(j)).$
- $A_k[j]$ est une fonction strictement croissante de j et de k .
- On a par exemple
$$A_3(1) = 2047.$$
$$A_4(1) \gg 2^{2048} \gg 10^{80}.$$
- $\alpha(n) = \min\{k | n \leq A_k(1)\}.$

23

Aujourd'hui

Arbres de syntaxe abstraite

Union-Find

Arbres couvrant de poids minimal

Problème du voyageur de commerce

24

Arbre couvrant de poids minimal

- On se donne un graphe connexe $G = (V, E)$, avec un poids $w(e)$ pour chaque arête $e = (u, v) \in E$.
- On veut calculer un arbre couvrant de G de poids minimal:
 - ▶ un *arbre couvrant* est un arbre (graphe connexe sans cycle) (V, E') avec $E' \subset E$.
 - ▶ Le poids d'un arbre est la somme des poids de ses arêtes.

25

Exemple d'application

- On a des villes à connecter par un réseau.
- Le graphe:
 - ▶ ses sommets sont les villes;
 - ▶ il y a une arête entre toute paire de sommets (le graphe est dit *complet*);
 - ▶ les poids d'une arête est le coût de connection (ex: distance).
- Un arbre couvrant de poids minimal
 - ▶ une façon de connecter les villes
 - ▶ qui minimise le coût total.
- Remarque: si les poids sont des distances, on est dans un cas particulier, appelé *le cas euclidien*:
 - = les poids vérifient l'inégalité triangulaire.

26

Algorithme de Kruskal

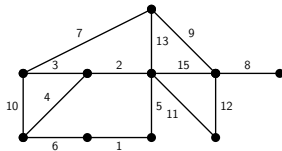
Algorithme *Kruskal*(G, w)

- Trier les arêtes par ordre de poids croissants $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_{|E|})$
- $T := \emptyset$
- Pour $i := 1$ à $|E|$
 - ▶ si $T \cup \{e_i\}$ est acyclique alors
 - $T := T \cup \{e_i\}$
- Renvoyer T .

Remarque: à chaque étape T est une forêt.

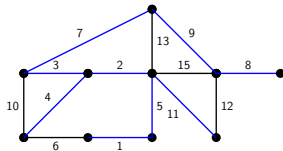
27

Exemple



28

Exemple



Résultat

28

Implémentation

```
class Arête {
    int extrémité1,extrémité2;
    int coût;}
```

```
Arête[] arêtes= new Arête[nb_arêtes];
...
// lecture des arêtes: omis
// tri des arêtes: omis
// initialisation des tableaux père et taille union/find: omis
...
int coût=0;
for (int i=0; i<arêtes.length;i++) {
    if (find(arêtes[i].extrémité1)/find(arêtes[i].extrémité2) {
        union(arêtes[i].extrémité1,arêtes[i].extrémité2);
        coût+=arêtes[i].coût;}}
```

29

L'algorithme de Kruskal est correct

- Il construit bien un arbre couvrant:
 - ▶ à chaque étape, T est une forêt.
 - ▶ chaque sommet a au moins une des arêtes qui lui est adjacente dans le T final.
- Il reste à montrer que l'arbre couvrant produit est de poids minimal.

30

Lemme

- Lemme: Soient T et U deux arbres couvrants de G . Soit a une arête telle que $a \in U$, $a \notin T$. Alors, il existe une arête $b \in T$ telle que $U - a + b$ soit un arbre couvrant. De plus, b peut être choisi dans le cycle formé par les arêtes de T et de a .

- Preuve:
 - ▶ la suppression de a dans U divise l'arbre en 2 composantes connexes U_1 et U_2 .
 - ▶ Le cycle γ créé par a dans $T + a$ contient nécessairement un nombre pair d'arêtes reliant ces deux composantes.
 - ▶ Comme a est une telle arête, il en existe au moins une autre b dans T .
 - ▶ Cette arête b satisfait bien aux conditions du lemme.

31

L'arbre couvrant produit est optimal

- Soit T l'arbre donné par l'algorithme de Kruskal.
- Si l'algorithme ne donne pas l'optimal c'est qu'il existe un arbre couvrant de poids inférieur. Choisissons en un U dont le nombre d'arêtes communes avec T est maximal.
- Soit a l'arête de U de plus petit poids qui n'est pas dans T , et b l'arête donnée par le lemme pour ce cas.
- Comme a n'a pas été choisie par l'algorithme de Kruskal, c'est qu'elle crée un cycle avec les éléments de T , et que ce cycle est formé d'arêtes toutes de poids inférieur ou égal à $w(a)$.
- Puisque b est dans ce cycle, on a $w(b) \leq w(a)$.
- $Poids(U - a + b) \leq Poids(U) < Poids(T)$, mais $U - a + b$ est un arbre couvrant qui a une arête commune avec T de plus que U .
- Ceci contredit le choix de U .

32

Complexité de Kruskal

- Complexité de Kruskal:
 - ▶ Tri des arêtes: $O(|E| \log |E|)$.
 - ▶ Parcours des arêtes: $O(|E|)$ finds et unions, soit $O(|V| + |E|\alpha(|V|))$.
- Total: $O(|E| \log |E|) + O(|V| + |E|\alpha(|V|))$.
- Dans un graphe connexe, $|V| - 1 \leq |E| \leq |V|^2$, et donc $\log |E| = O(\log |V|)$ et $\log |V| = O(\log |E|)$.
- $\alpha(|V|) = O(\log |V|) = O(\log |E|)$.
- Total plus joli: $O(|E| \log |V|)$.
- Total plus joli: $O(|E| \log |E|)$.

33

Aujourd'hui

Arbres de syntaxe abstraite

Union-Find

Arbres couvrant de poids minimal

Problème du voyageur de commerce

34

Le problème du voyageur de commerce

Un représentant doit visiter n villes. Le représentant souhaite faire une tournée en visitant chaque ville au moins et exactement une fois, et en terminant à sa ville de départ.

35

Sous forme de graphe

- On se donne un graphe connexe $G = (V, E)$, avec un poids $w(e)$ pour chaque arête $e = (u, v) \in E$.
- On veut déterminer un *cycle hamiltonien* (un cycle simple qui passe par tous les sommets) de G de poids minimal.
- On ne connaît aucun algorithme pour résoudre ce problème qui fonctionne en temps polynomial (le problème est NP-complet).

36

Complément: difficulté du problème

- En fait, on sait prouver qu'il existe un algorithme en temps polynomial pour un problème NP-complet si et seulement s'il existe un algorithme en temps polynomial pour n'importe lequel des problèmes NP-complets:
 - ▶ par exemple: il existe un algorithme en temps polynomial pour déterminer si un graphe général est 4-coloriable si et seulement s'il existe un algorithme en temps polynomial pour le problème du voyageur de commerce.
- Même si l'on se limite au cas Euclidien (les poids vérifient l'inégalité triangulaire), le problème du voyageur de commerce reste NP-complet.

37

Le cas euclidien est 2-approximable

- On se place dans le cas suivant:
 - ▶ le graphe est complet: pour toute paire de sommets u, v , il y a une arête (u, v) .
(Quitte à ajouter des arêtes de poids infini (très grand), on peut toujours s'y ramener).
 - ▶ les poids vérifient l'inégalité triangulaire:
pour 3 sommets u, v, w arbitraires de V ,
 $w(u, v) \leq w(u, w) + w(w, v)$.
- On ne connaît pas d'algorithme en temps polynomial qui produit une solution optimale.
- Mais on connaît un algorithme en temps polynomial qui produit une solution dont le poids est inférieur au double de l'optimal.
 $Poids(\text{Solution de l'algorithme}) \leq 2 * Poids(\text{Cycle optimal})$.

38

L'algorithme

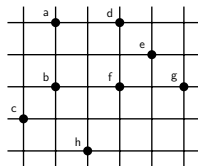
Algorithme:

- Construire un arbre couvrant de poids minimal T de G .
- Soit L la liste des sommets de G dans l'ordre où ils sont visités dans un parcours préfixe de T .
- Renvoyer le cycle hamiltonien qui visite les sommets dans l'ordre de L .

39

Exemple

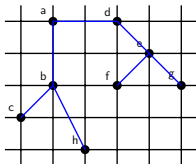
Graphe initial (les poids sont les distances euclidiennes).



40

Exemple

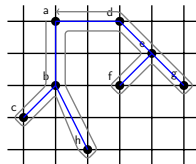
Arbre couvrant T de poids minimal.



40

Exemple

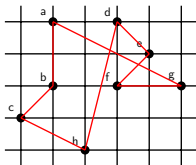
Parcours préfixe de T : $abchdefg$.



40

Exemple

Résultat



40

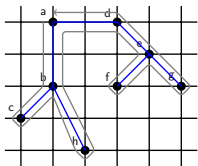
Preuve du facteur 2 d'approximation

- Soit H^* une tournée optimale, et H la tournée retournée par l'algorithme.
- Il reste donc à prouver que $\text{poids}(H) \leq 2 * \text{poids}(H^*)$.
- Soit T un arbre couvrant minimal: $\text{poids}(T) \leq \text{poids}(H^*)$, car le cycle H^* privé d'une arête est un arbre.
- Soit L le résultat d'un parcours de l'arbre T , en suivant l'ordre préfixe et avec les répétitions.

41

Preuve du facteur 2 d'approximation (suite)

Sur l'exemple: parcours $L = a, b, c, b, h, b, a, d, e, f, e, g, e, d, a$.



$$\text{poids}(L) = 2 * \text{poids}(T),$$

car chaque arête de T est visitée 2 fois.

42

Preuve du facteur 2 d'approximation (suite)

- Donc $\text{poids}(L) \leq 2 * \text{poids}(H^*)$.
- On peut supprimer les sommets en double de L par un sans augmenter le coût, grâce à l'inégalité triangulaire.
 - ▶ exemple: plutôt que de passer une deuxième fois par b dans $L = a, b, c, b, h, b, a, d, e, f, e, g, e, d, a$, on peut faire $L = a, b, c, h, b, a, d, e, f, e, g, e, d, a$: le poids d'aller de c à h est inférieur ou égal au poids d'aller de c à b puis de b à h par l'inégalité triangulaire.
- Donc $\text{poids}(H) \leq \text{poids}(L) \leq 2 * \text{poids}(H^*)$.

43