Organisation du cours

- 9 blocs, soit 9 vendredis.
  - Le matin, amphi, de **10h30 à 12h00**.
  - L'après midi, TP.
    - Gr1 -2, Salle info 34, J.C. Filliâtre - S. Lengrand
- Page du cours
  `www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF421`
  et vos questions à `Olivier.Bournez@polytechnique.fr` et/ou aux enseignants de l'équipe.
- Évaluation.
  - TP noté, le sixième, **11** décembre.
  - Contrôle à la fin,
  - Note de module : $\max(CC, \frac{3}{4}CC + \frac{1}{4}f(TP))$, avec f proche de l'identité.
- Possibilité de tutorat: les lundis de 16h30 à 18h30, Salle info 36, avec `E. Nicolas`.

Static/ non-Static

- Retour sur une question:

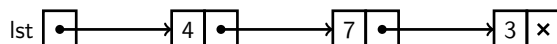
```
class MonInt {
    int val;
    static int abs(int x) {
        if (x<0) return -x; else return x;}
    int abs() {
        if (val<0) return -val; else return val;}
}
```

```
MonInt x = new MonInt();
x.val = 2;
System.out.println(MonInt.abs(-3)+"/"+x.abs());
```


Rappel: Liste

```
class Liste {
  int contenu;
  Liste suivant;
  Liste (int x, Liste a) {
    contenu = x;
    suivant = a;
  }}
```

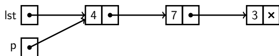
```
Liste lst = new Liste(4, new Liste (7, new Liste (3, null)));
```



Parcourir une liste

```
for (Liste p = ...; p≠ null; p = p.suivant)
{
// traiter p.contenu
}
```

```
Liste p = ...;
while (p≠ null) {
 //  traiter p.contenu
 p = p.suivant;
}
```

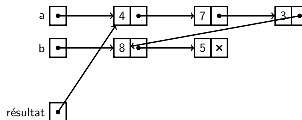


Concaténer deux listes (version itérative, mutable)

- Objectif:
  - ajouter les éléments de la liste b à la fin de ceux de la liste a.

```
static Liste nappend2(Liste a, Liste b) {
   if (a==null)
    return b;
   Liste p;
   for (p=a; p.suivant ≠null; p=p.suivant)
      {}
   p.suivant = b;
   return a;
}
```

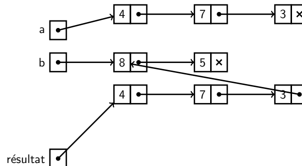

Concaténer deux listes (version itérative, mutable)



Concaténer deux listes (version itérative, persistante)

```
static Liste append2(Liste a, Liste b) {
  if (a== null) return b;
  Liste r = new Liste(a.contenu,null) ;
  Liste lst = r;
  for (a= a.suivant; a ≠null; a = a.suivant) {
    lst.suivant = new Liste(a.contenu,null);
    lst = lst.suivant;
 }
  lst.suivant = b;
  return r;
}
```


Concaténer deux listes (version itérative, persistante)



Concaténer deux listes (version récursive, persistante)

- Une liste d'entiers est solution de l'équation

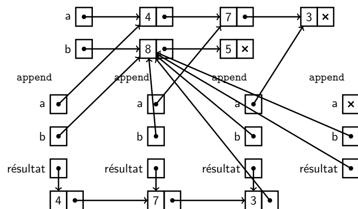
$$L = \textbf{null} \uplus (\textbf{int} \times L)$$

- Equations récursives, en notant $\emptyset$ la liste vide, et en notant (x, L) une liste non-vide.

$$\begin{aligned} append(\emptyset, b) &= b \\ append((x, L), b) &= (x, append(L, b)) \end{aligned}$$

```
static Liste append(Liste a,Liste b) {
   if (a== null)
      return b;
   else
      return new Liste(a.contenu, append(a.suivant,b));
}
```

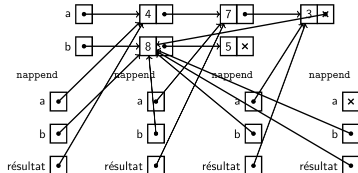

Concaténer deux listes (version récursive, persistante)



Concaténer deux listes (version récursive, mutable)

```
static Liste nappend(Liste a,Liste b) {
  if (a==null)
    return b;
  else {
    a.suivant = nappend(a.suivant,b);
    return a;
}}
```


Concaténer deux listes (version récursive, mutable)



Cours 2: Programmer avec des listes. Complexité. Tris.

Olivier Bournez

bournez@lix.polytechnique.fr
LIX, Ecole Polytechnique

INF421-b Bases de la programmation et de l'algorithmique

Aujourd'hui

Programmer avec des listes

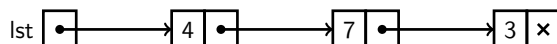
Complexité

Trier

Rappel: Liste

```
class Liste {
  int contenu;
  Liste suivant;
  Liste (int x, Liste a) {
    contenu = x;
    suivant = a;
  }}
```

```
Liste lst = new Liste(4, new Liste (7, new Liste (3, null)));
```



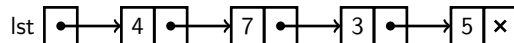
Calculer le maximum

- Le problème *MAX*.
  - On se donne une liste d'entiers naturels $e_1, e_2, \cdots, e_n$.
  - On veut calculer $\max\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

−1 si la liste est vide.

Calculer le maximum (itératif)

```
static int max(Liste a) {
    if (a== null) return -1;
    int max = a.contenu;
    for (a = a.suivant; a ≠ null;  a = a.suivant) {
      if (a.contenu > max)
        max = a.contenu;}
    return max;}
```



Nombre de comparaisons $C(n)$: $C(n) = n - 1$.
Nombre d'affectations $B(n)$: $n + 1 \leq B(n) \leq 2n$.

n = longueur de la liste.
comparaison = comparaison entre entiers.

Calculer le maximum (récursif)

- Une liste d'entiers est solution de l'équation

$$L = \textbf{null} \uplus (\textbf{int} \times L)$$

- Equations récursives, en notant $\emptyset$ la liste vide, et en notant (x, L) une liste non-vide.

$$\begin{array}{lcl} max_{liste}(\emptyset) & = & -1 \\ max_{liste}((x, L)) & = & \max(x, max_{liste}(L)) \end{array}$$

Calculer le max (récursif)

```
static int max(Liste a) {
   if (a == null) return -1;
   return max(a.contenu, max(a.suivant));
 }

 static int max(int a, int b) {
   if (a>b) return a;
   return b;
  }
```

Remarque de JAVA: on utilise une surcharge de méthode.

Nombre de comparaisons $C(n)$: $C(n) = n$.

Solution de $C(0) = 0$,
$C(n) = 1 + C(n - 1)$, pour $n > 0$.

Calculer le max (récursif inefficace)

Equations récursives:

$$\begin{array}{lcl} max_{liste}(\emptyset) & = & -1 \\ max_{liste}((x, L)) & = & \begin{cases} x & \text{si } x > max_{liste}(L) \\ max_{liste}(L) & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

```
static int max(Liste a) {
   if (a == null) return -1;
   if (a.contenu > max(a.suivant))
     return a.contenu;
   else
     return max(a.suivant);
 }
```

Nombre de comparaisons: $n \leq C(n) \leq 2^n - 1$.
Meilleur cas $C(n) = 1 + C(n - 1)$, pour $n > 0$, $C(0) = 0$
Pire cas $C(n) = 1 + 2 * C(n - 1)$, pour $n > 0$, $C(0) = 0$.

Quel est le meilleur programme?

- Styles
  - Récursif / Itératif

    Souvent:

    - Itératif plus efficace (en Java).
    - Récursif plus simple et élégant.**Récursif plus simple et élégant.**
  - Persistant / Non persistant

    Souvent:

    - Persistant moins problématique.
- Structures de données:
  - Tableaux / Listes / Piles, Files, Arbres, Graphes, ...

    Souvent:
    - Fonction du contexte

Aujourd'hui

Programmer avec des listes

Complexité

Trier

Complexité d'un problème, d'un algorithme

- On fixe une mesure élémentaire:
  - nombre de comparaisons,
  - nombre d'affectations,
  - mémoire utilisée,
  - temps utilisé,
  - ...
- Cette mesure associe à un algorithme $\mathcal{A}$ et une entrée d une valeur

$$Complexite(\mathcal{A}, d).$$

- On cherche souvent à évaluer cette complexité en fonction d'un paramètre naturel $n = taille(d)$, représentatif des entrées.
- Exemple:
  - $\mathcal{A}$: l'algorithme itératif pour *MAX* précédent.
  - d: une liste donnée en entrée.
  - $n = taille(d)$, le nombre d'éléments dans la liste.
  - $Complexite(\mathcal{A}, d)$, le nombre de comparaisons de $\mathcal{A}$ sur d.

- On peut alors parler de la complexité (au pire cas)
  - d'un algorithme (on fait varier seulement les entrées)

$$Complexite_{\mathcal{A}}(n) = \max_{d/taille(d)=n} Complexite(\mathcal{A}, d).$$

  - d'un problème (on fait varier l'algorithme, et les entrées)

$$Complexite(n) = \inf_{\mathcal{A} \text{ correct}} \max_{d/taille(d)=n} Complexite(\mathcal{A}, d)$$

- On arrive parfois à parler de la complexité exacte.
- On doit souvent se limiter à une étude asymptotique, ou à des bornes asymptotiques.

Exemple d'étude exacte

- Etude du problème *MAX* en nombre de comparaisons:
  - Le problème *MAX* admet une solution avec $n-1$ comparaisons.

```
static int max(Liste a) {
   if (a== null) return -1;
   int max = a.contenu;
   for (a = a.suivant; a ≠ null;  a = a.suivant) {
     if (a.contenu > max)
       max = a.contenu;}
   return max;}
```

  - Cet algorithme est optimal en nombre de comparaisons.

Preuve

- Proposition: dans tout algorithme, tout élément autre que le maximum doit être comparé au moins une fois avec un élément qui lui est plus grand.
- Preuve:
  - soit i_0 le rang du maximum M retourné par l'algorithme sur une liste $L = e_1.e_2.\cdots.e_n$.
  - Par l'absurde: soit $j_0 \neq i_0$ tel que e_{j_0} n'est pas comparé avec un élément plus grand que lui.
  - e_{j_0} n'a donc pas été comparé avec e_{i_0} le maximum
  - Considérer la liste $L' = e_1.e_2.\cdots.e_{j_0-1}.M+1.e_{j_0+1}.\cdots.e_n$ obtenue à partir de L en remplaçant l'élément d'indice j_0 par $M+1$.
  - L'algorithme effectue exactement les mêmes comparaisons sur L et L', sans comparer $L'[j_0]$ avec $L'[i_0]$ et donc retournera $L'[i_0]$, ce qui est incorrect.
- Conséquence: il faut au moins $n-1$ comparaisons pour résoudre *MAX*.

Asymptotiques

- Pour un processeur capable d'effectuer un million d'instructions élémentaires par seconde.

	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n=10$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	4 s
$n=30$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	18 m	10^{25} a
$n=50$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	11 m	36 a	∞
$n=10^2$	<1 s	<1 s	<1 s	1s	12.9 a	10^{17} a	∞
$n=10^3$	<1 s	<1 s	1s	18 m	∞	∞	∞
$n=10^4$	<1 s	<1 s	2 m	12 h	∞	∞	∞
$n=10^5$	<1 s	2 s	3 h	32 a	∞	∞	∞
$n=10^6$	1s	20s	12 j	31710 a	∞	∞	∞

- Notations: ∞ = le temps dépasse 10^{25} années, s= seconde, m= minute, h = heure, a = an.

Notation de Landau (Pire Cas)

- Notation de Landau:
  - $f(n) = O(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et B telles que

$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq Bg(n)$$

    Ce qui signifie que f ne croît pas plus vite que g.

- Exemple:
  - Le problème *MAX* admet une solution itérative en $O(n)$ affectations.
  - L'algorithme itératif précédent fonctionne en $O(n)$ affectations.
- Un algorithme
  - en temps $O(1)$ effectue un nombre constant d'opérations.
  - en temps $O(n)$ s'appelle un algorithme linéaire.
  - en temps $O(n^k)$ s'appelle un algorithme polynomial.

Notation de Landau

- Notation de Landau (suite)
  - $f(n) = \Omega(g(n))$ si et seulement si il existe deux constantes positives n_0 et B telles que

$$\forall n \geq n_0, f(n) \geq Bg(n)$$

  - $f(n) = \Theta(g(n))$ si et seulement si il existe trois constantes positives n_0, B et C telles que

$$\forall n \geq n_0, Bg(n) \leq f(n) \leq Cg(n)$$

- Exemple:
  - Le problème *MAX* nécessite $\Theta(n)$ comparaisons.
  - (à venir) Trier nécessite $\Omega(n \log n)$ comparaisons.

Complexité d'un algorithme en moyenne

- Si on fixe une distribution π sur les entrées d, il est parfois possible d'évaluer la complexité en moyenne d'un algorithme:

$$Complexite{-}Moyenne_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d/taille(d)=n} \pi(d) Complexite(\mathcal{A}, d)$$

- Exemple: pour l'algorithme $\mathcal{A}$ suivant.

```
static boolean Dans(int x, Liste a) {
    for (;a ≠ null; a=a.suivant) {
      if (a.contenu == x)
         return true;
      }
  return false;
}
```

Nombre de comparaisons (entre entiers): k, où k est le rang de l'élément lorsqu'il est dans la liste, n sinon.

- Si on suppose que les entrées sont les listes permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$, et qu'elles sont équiprobables,

$$\begin{aligned} Complexite - Moyenne_{\mathcal{A}}(n) &= Esperance_{d/taille(d)=n}[k] \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \times P(k = i) \end{aligned}$$

Puisque les permutations sont équiprobables, $Proba(k = i) = 1/n$.

$$\begin{aligned} Complexite - Moyenne_{\mathcal{A}}(n) &= \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

- (poly) D'autres exemples plus compliqués.
- (joli exercice) Pour $\mathcal{A}$ algorithme itératif précédent pour *MAX*, $Complexite - Moyenne_{\mathcal{A}}(n)$ en affectations entre variables entières est en $\Theta(\log n)$ (de l'ordre de $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$).

Aujourd'hui

Programmer avec des listes

Complexité

Trier

Pourquoi trier?

- Trier est une opération naturelle.
- Travailler sur des données triées est parfois plus efficace.
  - Exemple:
    - Rechercher un élément dans un tableau à n éléments: $O(n)$ (utiliser le principe de la fonction *Dans* précédente sur les listes).
    - Rechercher un élément dans un tableau trié à n éléments: $O(\log n)$ (par dichotomie).
    - Trier devient intéressant dès que le nombre de recherches est en $\Omega(Complexite(tri)/n)$.

Recherche par dichotomie

```
static boolean trouve(int[] T, int v, int min, int max){
    if(min ≥ max) // vide
       return false;
    int mid = (min + max) / 2;
    if (T[mid] == v) return true;
    else if (T[mid] > v) return trouve(T, v, min, mid);
    else return trouve(T, v, mid + 1, max);
}
```

Nombre de comparaisons

- $C(1) = 2$,
- $C(n) \leq 2 + C(n/2)$, pour n pair,
- $C(n) \leq 2 \log n + 2$, pour n puissance de 2.

$$C(n) = O(\log n),$$

dans le cas général.

Trier par insertion

- Méthode souvent utilisée pour trier un jeu de cartes.
- Etape préliminaire: savoir insérer un élément x dans une liste triée $e_1.e_2.\cdots.e_n$, avec $e_i \leq e_{i+1}$.
  - Equations récursives:

$$\begin{array}{lcll} Insere(x, \emptyset) & = & (x, \emptyset) & \\ Insere(x, (a, L)) & = & (x, (a, L)) & \text{si } x \leq a \\ Insere(x, (a, L)) & = & (a, Insere(x, L)) & \text{sinon} \end{array}$$

  - Correction: par induction, si on suppose (a, L) triée, le résultat est bien trié.

```
static Liste Insere(int x, Liste a) {
  if (a==null) return new Liste(x,null);
  if (x ≤ a.contenu) return new Liste(x,a);
  return new Liste(a.contenu,Insere(x,a.suivant));
}
```


Tri par insertion

```
static Liste Trie(Liste p) {
  Liste r = null;
  for (; p≠ null; p = p.suivant)
    r = Insere(p.contenu,r);
  return r;}
```

- Complexité $I(n)$ de `Insere` en comparaisons : $I(n) = O(n)$.
- Complexité $C(n)$ de `Trie` en comparaisons: $C(n) \leq nI(n) = O(n^2)$.
- Le pire cas est atteint lorsqu'on trie une liste déjà triée, et mène à $\Omega(n^2)$ comparaisons. La complexité du tri par insertion est donc bien en $\Theta(n^2)$.

Tri par insertion en moyenne

- Le meilleur cas est atteint lorsqu'on trie une liste dans l'ordre décroissant, et mène à $O(n)$ comparaisons.
- $O(n) \leq C(n) \leq O(n^2)$.
- En moyenne? Si on se restreint au tri des listes d'entiers distincts deux à deux, et en supposant les permutations équiprobables,

$$\begin{aligned} C(n) &= \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{3}{4}n - \ln n + O(1). \\ &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$

(Supplément) Preuve

Principe:

- Coût moyen de `Insere` avec déjà $k-1$ éléments:

$$I(k) = \frac{1}{k}(1 + 2 + \cdots + k - 1 + k - 1) = \frac{1}{k}(\frac{k(k+1)}{2} - 1)$$

(position de l'élément inséré équiprobable)

- Coût moyen de `Trie`:

$$C(n) = 0 + \frac{1}{2}(\frac{2(2+1)}{2} - 1) + \cdots \frac{1}{n}(\frac{n(n+1)}{2} - 1)$$

(k premiers éléments répartis uniformément)

Tri par fusion

- Fusion:
  - Construire une liste triée qui contienne l'union des éléments de deux listes triées.
- Exemple: $\mathit{Fusion}(1.4.5.7, 2.4.9) = 1.2.4.4.5.7.9$
- Equations récursives de $\mathit{Fusion}(X, Y)$:

$$\begin{array}{lcll} \mathit{Fusion}(X, \emptyset) & = & X & \\ \mathit{Fusion}(\emptyset, Y) & = & Y & \\ \mathit{Fusion}((a, L), (b, M)) & = & (a, \mathit{Fusion}(L, (b, M))) & \text{si } a \leq b \\ \mathit{Fusion}((a, L), (b, M)) & = & (b, \mathit{Fusion}((a, L), M)) & \text{sinon} \end{array}$$

- Correction: par induction, si on suppose (a, L) et (b, M) triées, le résultat est correct.

Fusion

```
static Liste Fusion(Liste a, Liste b) {
  if (a == null)
    return b;
  if (b == null)
    return a;
  if (a.contenu < b.contenu)
    return new Liste(a.contenu, Fusion(a.suivant, b));
  else
    return new Liste(b.contenu, Fusion(a, b.suivant));
}
```

- Complexité en nombre de comparaisons: $O(\mathit{longueur}(a) + \mathit{longueur}(b))$.

Tri fusion

- Une liste de 0 ou 1 élément est triée.
- Toute autre liste L
  - peut se découper en deux sous-listes L_1 et L_2 de même taille (à 1 près).
  - Les sous-listes L_1 et L_2 sont triées récursivement,
  - puis fusionnées.

$$TriFusion(L) = Fusion(TriFusion(L_1), TriFusion(L_2)).$$

Paradigme "Diviser pour règner"

- Complexité $C(n)$ en nombre de comparaisons en $O(Fusion) + 2C(n/2))$, soit

$$C(n) = O(n + 2C(n/2)),$$

ce qui mène à

$$C(n) = O(n \log n).$$

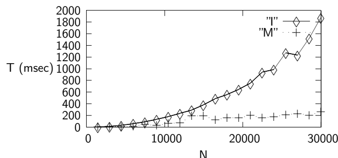
- Note:
  - comment résoudre une telle récurrence: poser $n = 2^p$ et faire le changement de variable $C'(p) = C(2^p)$.
  - $C'(p) = O(2^p + 2C'(p-1))$,
  - donc $C'(p) = O(2^p p)$.

Tri fusion

```
static Liste MergeSort(Liste l) {
  Liste l1 = null,l2 = null;
  boolean even = true ;
  for ( ; l ≠ null ; l = l.suivant ) {
    if (even) {
      l1 = new Liste (l.contenu, l1) ;
    } else {
      l2 = new Liste (l.contenu, l2) ;
    }
    even = !even ;
  }
  if (l2==null) return l1;
  return Fusion(MergeSort(l1),MergeSort(l2));
  }
```

- Note: `L1` et `L2` sont en fait ici dans l'ordre inverse des éléments pairs et impairs, par commodité.
- Note: le tri fusion fait *toujours* de l'ordre de $n \log n$ comparaisons, et pas seulement au pire cas.

Insertion vs. fusion



I est le tri par insertion.
M est le tri par fusion.

Complexité du problème du tri

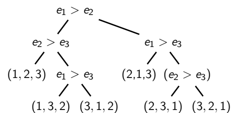
- Tout algorithme de tri
  - qui fonctionne par comparaisons,
  - qui n'a pas d'autres informations sur les données,

  effectue $\Omega(n \log n)$ comparaisons dans le pire des cas.

- Autrement dit, la complexité du problème du tri (avec ces hypothèses) est en $\Theta(n \log n)$.
- Le tri par fusion est donc parmi les tris optimaux en $O(n \log n)$.

Preuve de la borne inférieure $\Omega(n \log n)$: 1/2

- A un algorithme on peut associer un arbre de décision:



  - En chaque noeud qui n'est pas une feuille: une comparaison effectuée par l'algorithme.
    - La racine est la première comparaison.
    - Fils gauche: récursivement ce qui se passe alors pour un résultat positif.
    - Fils droit: récursivement ce qui se passe alors pour un résultat négatif.
  - En chaque feuille, le résultat produit.

Preuve de la borne inférieure $\Omega(n \log n)$: 2/2

- Un arbre binaire de hauteur h a au plus 2^h feuilles.
  - par récurrence.
- Les feuilles doivent contenir au moins les $n!$ permutations, et donc $h \geq \log(n!) = \Omega(n \log n)$ par la formule de Stirling.