Fondements de l'informatique: Examen
Durée: 3h

Sujet proposé par Olivier Bournez
Version 8

L'énoncé comporte 3 parties (sections), certaines avec des sous-parties (sous-sections), chacune indépendante, qui pourront être traitées dans un ordre quelconque. En revanche, dans chaque partie, il peut être utile, dans la réponse à une question, d'utiliser les questions précédentes ! On pourra librement admettre le résultat d'une question pour passer aux questions suivantes. La difficulté des questions n'est pas une fonction linéaire ni croissante de leur numérotation.

On pourra utiliser les résultats et théorèmes démontrés en cours sans chercher à les redémontrer.

Dans tout l'énoncé, et en particulier dans la partie "Machines de Turing", on demande des algorithmes et des solutions à un haut niveau : dans aucune des questions il n'est demandé de décrire complètement une machine de Turing, ni même d'en donner une description graphique ; on pourra se contenter pour décrire un algorithme de le décrire par exemple en français ou dans un langage de programmation classique comme JAVA, C ou CAML.

1 Machines de Turing

Question 1. *Parmi les problèmes suivants, lesquels sont décidables, récursivement énumérables ou non-récursivement énumérable ? Justifier votre réponse.*

1. *Déterminer si le langage accepté par une machine de Turing M contient au moins trois mots.*
2. *Déterminer si une machine de Turing M vérifie la propriété suivante : partant d'un ruban contenant uniquement le symbole de blanc elle écrira à un certain moment au moins une fois un symbole non-blanc sur son ruban.*

2 NP-complétude : Problème k-COULEURS

On s'intéresse à la famille de problèmes de décision k-COULEURS où $k \geq 3$ est un entier. Pour chaque entier k, le problème k-COULEURS est le suivant :

— **Donnée**: Un graphe $G = (V, E)$.

— **Réponse**: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant **exactement** k couleurs.

(On pourra utiliser les constructions du cours dans chacune des questions).

Question 2. *Soit $k \geq 3$ un entier. Justifier que k-COULEURS est dans NP.*

Question 3. *Justifier pourquoi la preuve vue en cours de la NP-complétude de 3-COLORABILITE (étant donné un graphe $G = (V, E)$, décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant* ***au plus*** *3-couleurs) permet d'affirmer la NP-complétude de 3-COULEURS.*

Question 4. *Soit $k > 3$. Prouver la NP-complétude de k-COULEURS.*

3 Pavages de Wang

Cette partie est constituée d'exercices indépendants à propos du problème des tuiles de Wang.

On fixe un domaine R : dans toute la suite, R sera essentiellement soit le plan, soit un rectangle borné du plan à dimensions entières.

On se donne un ensemble fini τ de *tuiles de Wang* : chaque *tuile de Wang* est un carré dont chaque côté est coloré ; toutes les tuiles sont de mêmes dimensions de côté 1 ; les tuiles sont distinctes deux-à-deux. On cherche à déterminer si l'on peut complètement couvrir le domaine R avec ces tuiles de telle sorte que deux carrés adjacents aient leurs côtés en contact de la même couleur. On s'autorise à utiliser chaque tuile un nombre arbitraire de fois. Par contre, on ne s'autorise pas à tourner les tuiles [1].

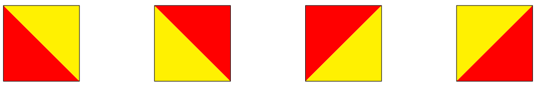
Si cela est plus clair, plus formellement :

- une *tuile de Wang* peut se voir comme un quadruplet (d, h, g, b), avec $d, h, g, b \in \mathcal{C}$: l'ensemble $\mathcal{C}$ représente l'ensemble fini des couleurs possibles, et d, h, g, b représentent respectivement la couleur du côté droit, haut, gauche et bas respectivement du carré.
- Etant donné un ensemble τ de tuiles de Wang, un pavage par τ d'un domaine $R \subset \mathbb{Z}^2$ associe à chaque élément de $R \subset \mathbb{Z}^2$ une tuile de τ avec les contraintes suivantes :
  - une tuile A ne peut être placée à la droite d'une autre tuile B que si la couleur de droite de la tuile B est égale à la couleur de gauche de la tuile A ;
  - une tuile A ne peut être placée en bas d'une autre tuile B que si la couleur du bas de la tuile B est égale à la couleur du haut de la tuile A ;

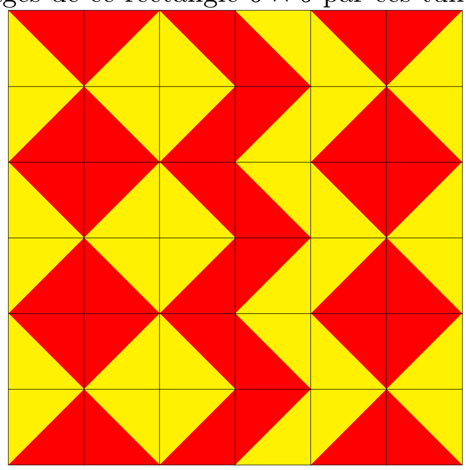
S'il est possible de paver le domaine R par l'ensemble de tuiles τ, on dit que R *est pavable par* τ.

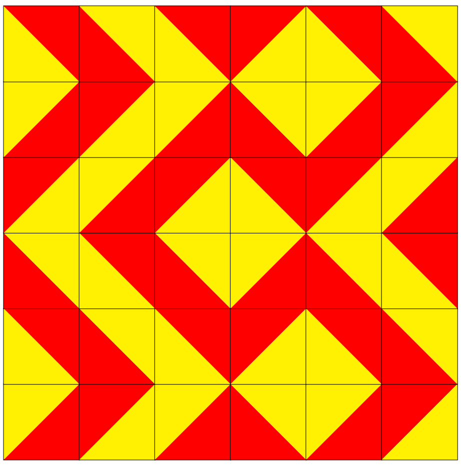
Dans le cas où le domaine R est borné, une des couleurs de $\mathcal{C}$ est appelée *couleur blanche*. On parlera de *pavage à bords blancs* si on impose en plus que si une tuile A touche l'un des bords de R, alors le(s) bord(s) de A qui touche(nt) R doivent être de couleur blanche.

Exemple : On considère les 4 tuiles suivantes :



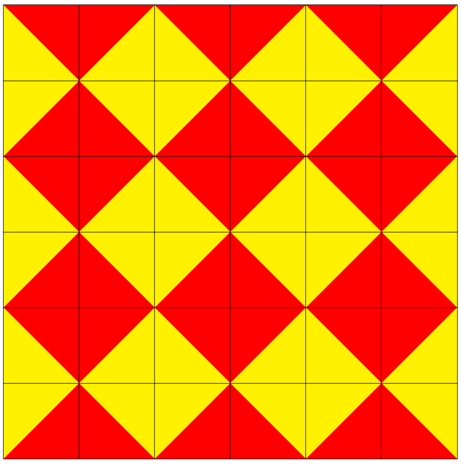
Voici 4 pavages du rectangle [2] (carré) 6×6. Observons que ce sont 4 pavages parmi les $4096 = 2^6 \times 2^6$ pavages de ce rectangle 6×6 par ces tuiles.

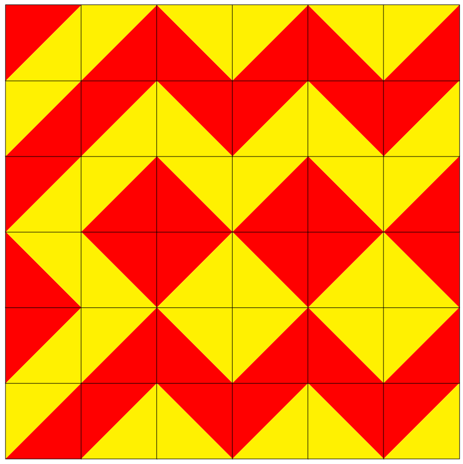




1. Pas de rotation, ni de retournement. Autrement dit, le haut et la droite d'une tuile doivent rester en haut et à droite.

2. Ce ne sont pas des pavages à bords blancs, car les bords du rectangle ne sont pas de couleur uniforme. Remarque : Il n'y a pas de pavage à bord blanc avec ce jeu de tuiles car aucune tuile ne saurait être placée dans un coin du rectangle (un pavage à bord blanc imposerait que les 4 côtés du rectangle 6×6 soient de la même couleur). Remarque : le troisième pavage (page suivante) a ses côtés opposés de la même couleur, mais pas tous ses côtés de la même couleur.

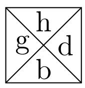




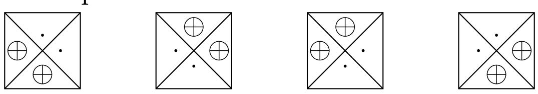
Parenthèse (non-indispensable, au cas où cela aide) : Si l'on préfère encore, c'est essentiellement une formalisation du concept de *puzzle* avec lequel les enfants jouent, en identifiant couleurs à formes complémentaires. Par rapport au jeu usuel des enfants, on s'autorise à utiliser plusieurs fois une pièce du puzzle si besoin.

On va se limiter dans ce sujet essentiellement soit au cas où le domaine R à paver est un rectangle borné à dimensions entières, soit au cas où le domaine R à paver est le plan $\mathbb{Z}^2$ tout entier.

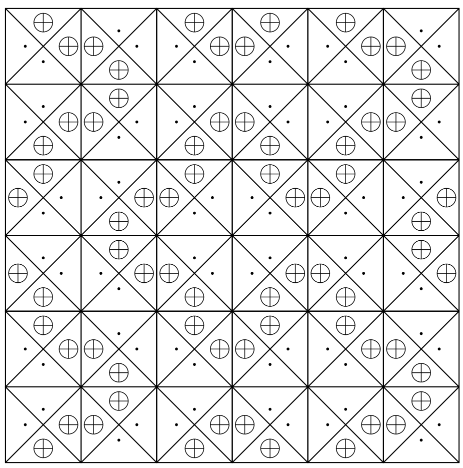
Convention graphique : Pour des raisons de lisibilité, plutôt que d'utiliser des couleurs dans les dessins de cet énoncé, on utilisera parfois des symboles représentant des couleurs. La tuile (d, h, g, b) dont les côtés droit, haut, gauche et bas sont respectivement d, h, g, b sera représentée graphiquement comme suit :



Exemple : Si l'on prend . et $\oplus$ comme symboles de couleurs, on peut représenter graphiquement les tuiles de l'exemple précédent par :



Le deuxième pavage de la page précédente peut alors aussi se décrire graphiquement comme :



3.1 Des pavages à la logique

On cherche dans cette sous-section (indépendante de la suite) à relier la question de l'existence d'un pavage à celle de l'existence d'un modèle d'une certaine théorie logique. On veut formaliser le cas du pavage du plan $\mathbb{Z}^2$.

Question 5. *On considère un langage constitué de 4 symboles de fonctions unaires e, n, w, s (moyen mnémotechnique : e, n, w, s pour* est, nord, ouest, sud*) avec les axiomes suivants en plus des axiomes de l'égalité :*

$$\forall x \quad n(s(x)) = x \tag{1}$$
$$\forall x \quad s(n(x)) = x \tag{2}$$
$$\forall x \quad w(e(x)) = x \tag{3}$$
$$\forall x \quad e(w(x)) = x \tag{4}$$
$$\forall x \quad e(n(x)) = n(e(x)) \tag{5}$$
$$\forall x \quad e(s(x)) = s(e(x)) \tag{6}$$
$$\forall x \quad w(n(x)) = n(w(x)) \tag{7}$$
$$\forall x \quad w(s(x)) = s(w(x)) \tag{8}$$

Appelons E_0 l'ensemble des axiomes obtenus[3].

Le plan $\mathbb{Z}^2$ est un modèle de ces axiomes E_0 : l'idée est d'interpréter $w(x)$ comme le voisin gauche de la cellule x (et de façon similaire pour e, n, s avec voisin droit, haut, bas respectivement).

Expliquer pourquoi on peut avoir envie d'ajouter l'axiome $\forall x \ \neg e(e(x)) = x$, et même avoir envie d'ajouter toute une famille d'axiomes.

On notera E_1 l'ensemble des axiomes obtenus.

Question 6. *Les axiomes E_0 comme E_1 ne permettent pas de garantir des modèles* connexes *: on dira qu'un modèle est connexe si pour deux éléments x et y du domaine, x et y peuvent être connectés par les fonctions e, w, n, s (c'est-à-dire qu'une certaine composition d'applications de ces fonctions envoie l'un sur l'autre).*

Décrire un modèle non-connexe des axiomes E_1 proposés dans la question précédente.

Ce phénomène est en fait inévitable :

Question 7. *Prouver que tout ensemble d'axiomes qui étend les axiomes E_0, qui possède le plan $\mathbb{Z}^2$ comme modèle, possède aussi des modèles non-connexes comme modèle (on pourra utiliser le théorème de compacité).*

Question 8. *On considère un ensemble fini τ de tuiles de Wang. Supposons que l'ensemble des couleurs de ces tuiles soit $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, c\}$.*

On ajoute aux symboles de fonctions précédents w, e, n, s des symboles de relations unaires $C_1, C_2, \ldots, C_c$ et des symboles de relations unaires $C'_1, C'_2, \ldots, C'_c$.

On souhaite que $C_i(x)$ soit vraie si et seulement si la couleur du coté droit de x est i.

On souhaite que $C'_i(x)$ soit vraie si et seulement si la couleur du coté haut de x est i.

Ecrire une théorie T_τ (c'est-à-dire un ensemble d'axiomes) qui code le fait que chaque cellule a ses côtés colorés avec l'une des couleurs de $\mathcal{C}$, et que les couleurs des côtés correspondent à une tuile de τ.

Rappel : on vise à capturer dans toute cette sous-section un pavage du plan (donc non-borné).

Question 9. *Prouver que T_τ est consistant si et seulement si τ pave le plan $\mathbb{Z}^2$.*

3. Ceux de l'égalité et les 8 axiomes précédents.

On dira dans ce sujet qu'un pavage du plan est *périodique* s'il existe deux entiers p et q tels que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, la tuile en (x_1, x_2) est la même qu'en $(x_1 + p, x_2)$ et aussi la même qu'en $(x_1, x_2 + q)$ (et donc aussi la même qu'en $(x_1 + p, x_2 + q)$).

Question 10. *Prouver que T_τ possède un modèle fini (c'est-à-dire de domaine fini) si et seulement si τ peut paver le plan de façon périodique.*

3.2 Pavabilité du plan

L'objectif de cette sous-section (indépendante de ce qui précède) est de démontrer qu'il n'est pas possible de décider si un ensemble τ de tuiles de Wang pave le plan.

Question 11. *Prouver qu'il n'est pas possible de décider si une machine de Turing donnée accepte le mot vide.*

On veut réduire le problème de l'arrêt d'une machine de Turing M sur un ruban vide au problème du pavage du plan : pour une machine M, on va considérer un ensemble de tuiles.

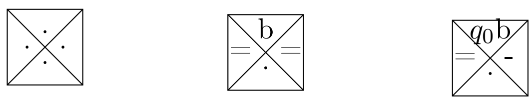
L'ensemble $\mathcal{C}$ des couleurs que l'on va utiliser est donné par

$$\mathcal{C} = \{., =, -, :\} \cup \Gamma \cup Q \cup (Q \times \Gamma)$$

où Q est l'ensemble des états de la machine M, Γ l'alphabet utilisé par la machine M (alphabet de travail).

Concrètement, on considère

— d'une part les tuiles ci-dessous, où $b \in \Gamma$ est le symbole de blanc, et $q_0 \in Q$ l'état initial de M (pour éviter trop de lourdeurs, on note $q_0 b$ pour le couple (q_0, b). On utilisera la même convention dans la suite).



(a) (b) (c) (d)

— d'autre part : On note q_a et q_r l'état d'acceptation et de refus respectivement de M :
  - — pour chaque lettre $\alpha \in \Gamma$ de l'alphabet de M, on ajoute une tuile (e) ;
  - — pour chaque couple $q \in Q, \alpha \in \Gamma$, avec $q \neq q_a$, $q \neq q_r$, une tuile (f) ou une tuile (g) ou une tuile (h) : on prend la tuile (f) si $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', \leftarrow)$, (g) si $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', |)$, et (h) si $\delta(q, \alpha) = (q', \alpha', \rightarrow)$;
  - — pour chaque couple $q \in Q, \alpha \in \Gamma$, avec $q \neq q_a$, $q \neq q_r$, une tuile (i) et une tuile (j).

  Avec :

(e) (f) (g) (h) (i) (j)

Question 12. *On suppose que l'on a la tuile (c) à la position $(0, 0)$ de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que dans tout pavage du plan, sa gauche et sa droite sont nécessairement remplis de tuiles de type (b) ou de type (d), et que dans toutes les lignes plus bas il n'y a que des tuiles de type (a).*

Question 13. *On suppose que l'on a la tuile (c) à la position $(0, 0)$ de $\mathbb{Z}^2$ dans un pavage du plan. Décrire la ligne au dessus.*

Question 14. *Démontrer que le problème de décision suivant est indécidable :*

— ***Donnée:*** *un ensemble fini τ de tuiles de Wang, et une tuile $s \in \tau$.*
— ***Réponse:*** *Décider s'il est possible de paver le plan $\mathbb{Z}^2$ avec les tuiles de τ en plaçant la tuile s en $(0,0)$.*

On admettra que le problème reste indécidable même sans imposer la tuile en $(0,0)$.

Question 15. *Démontrer que l'on peut paver le plan si et seulement si l'on peut paver tous les carrés de côté fini (on pourra utiliser le Lemme de König qui dit que tout arbre qui possède un nombre infini de sommets et dont tout sommet a un degré fini*[4] *possède un chemin infini).*

Question 16. *Déduire des résultats précédents qu'il n'est pas vrai que tout pavage du plan avec un nombre fini de tuiles de Wang est obtenu en répétant à jamais un motif périodique.*

3.3 Pavage d'un rectangle

On considère dans cette sous-section (indépendante de ce qui précède et de ce qui suit) que le domaine R à paver est un rectangle borné du plan à dimensions entières.

On s'intéresse au problème de décision PAVAGE-RECTANGLE:

— **Donnée**: un rectangle R à côtés de dimensions entières, un ensemble de tuiles de Wang τ
— **Réponse**: déterminer si l'on peut paver R par τ à bords blancs.

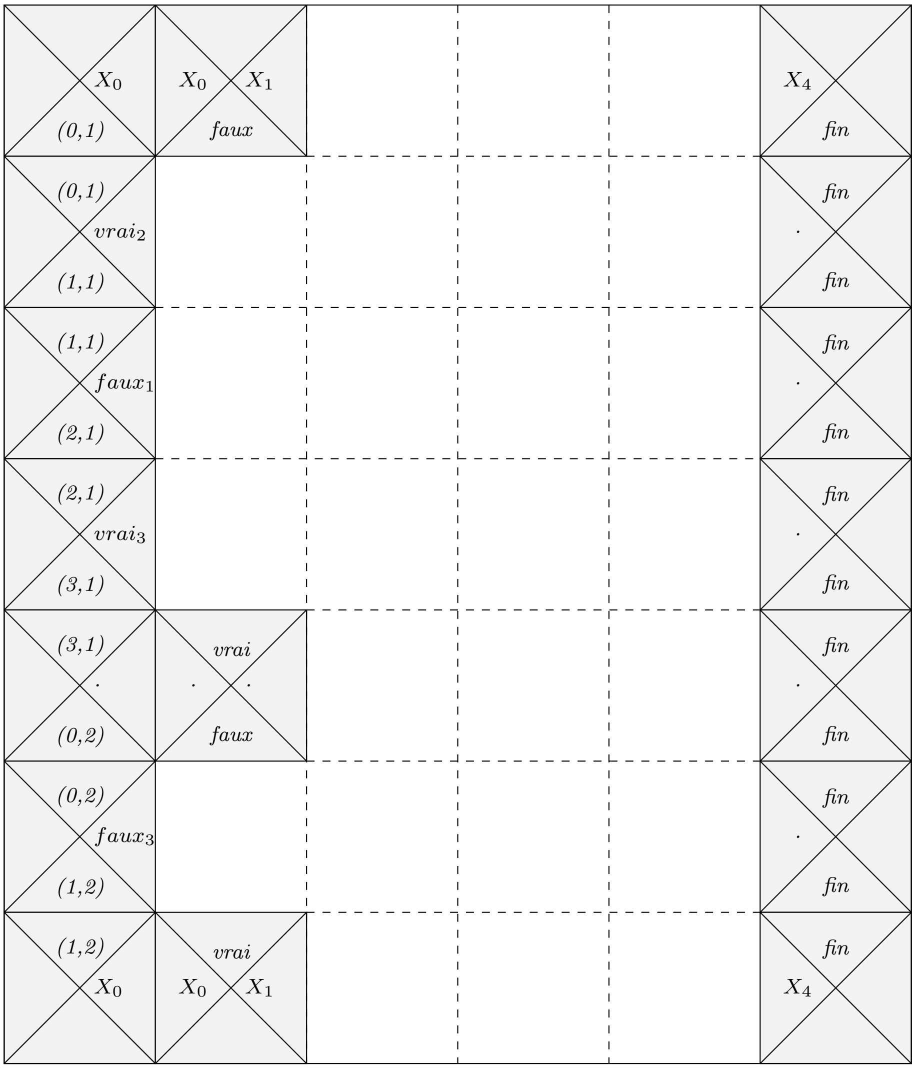
Question 17. *Prouver que le problème PAVAGE-RECTANGLE est dans NP.*

Question 18. *La formule propositionnelle $(x_2 \vee \neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_3)$ est-elle satisfiable ?*

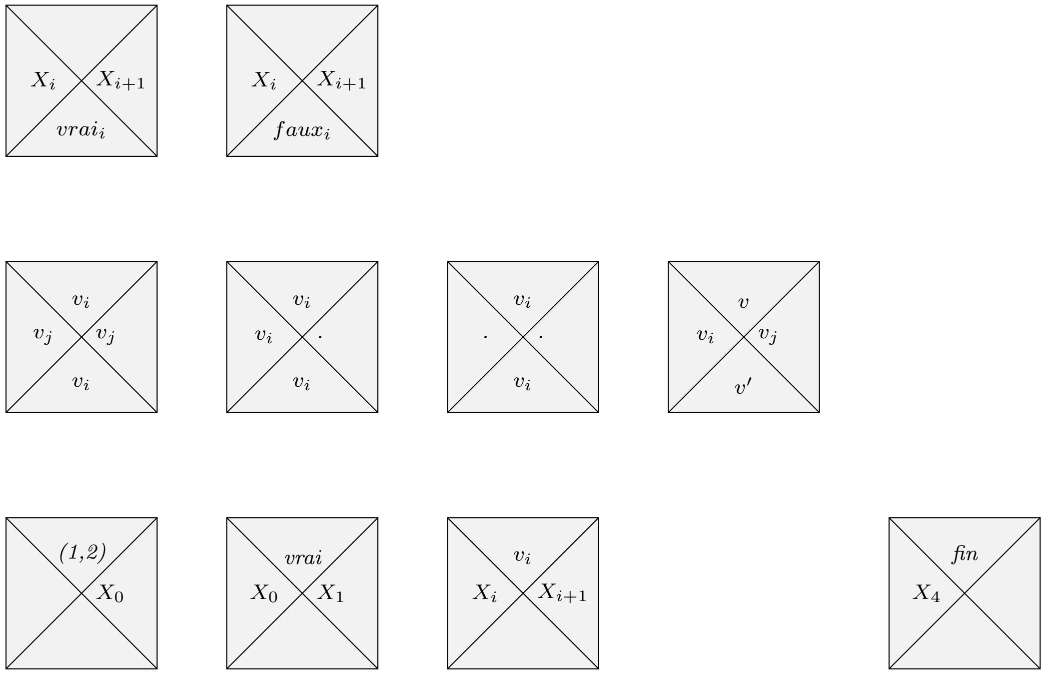
Peut-on compléter le rectangle 6×7 suivant

---

4. On appelle *degré* d'un sommet d'un arbre son nombre de fils (c'est donc le nombre de voisins du sommet moins 1 (son père) si ce n'est pas la racine, et son nombre de voisins si c'est la racine).



avec les tuiles



pour $i = 1, 2, 3$, $v_i \in \{vrai_i, faux_i\}$, $v, v' \in \{vrai, faux\}$, $v' = v \vee (v_i = v_j)$, pour obtenir un pavage licite ?

Question 19. *En analysant le lien dans la question précédente entre les deux questions posées, prouver que le problème PAVAGE-RECTANGLE est NP-complet.*

3.4 De la logique aux pavages

Cette sous-section est indépendante des précédentes.

Historiquement, Wang a introduit ses tuiles en cherchant à comprendre si les formules de type[5] $\forall_1\exists_1\forall_1$ sont décidables.

L'objet de cette question est de voir via un exemple comment les pavages apparaissent.

On considère la formule suivante

$$\phi = \forall x \exists y \forall z \ (S(x,y) \wedge T(x,y,z) \wedge \neg T(y,y,z)) \vee \neg S(x,y).$$

On se demande s'il existe une structure $\mathfrak{M}$ où la formule ϕ est vraie. Il faut donc choisir un ensemble M, definir des relations $S^{\mathfrak{M}}$ et $T^{\mathfrak{M}}$ telles que $\mathfrak{M}$ vérifie ϕ pour ces interprétations de S et T.

Considérons une structure $\mathfrak{M}$ où ϕ est vraie : on peut donc trouver pour tout x un y qui rend vraie la formule $\forall z \ (S(x,y) \wedge T(x,y,z) \wedge \neg T(y,y,z)) \vee \neg S(x,y)$. Notons, par abus de notation, $f(x)$ cet élément y.

Question 20. *On part d'un élément x_0 et on considère l'ensemble $A = \{f^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que cela donne une sous-structure de $\mathfrak{M}$ qui vérifie également la formule ϕ (on appelle sous-structure une structure dont le domaine est un sous-ensemble du domaine de la structure $\mathfrak{M}$).*

On considère maintenant la structure sur $\mathbb{N}$ (de signature contenant les symboles de relations S et T) définie de la façon suivante :

— $(n,m) \in S^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $(f^n(x_0), f^m(x_0)) \in S^{\mathfrak{M}}$;

5. Une formule de type $\forall_1\exists_1\forall_1$ est une formule en forme prénexe dont le préfixe correspond à une unique quantification existentielle entre deux uniques quantifications universelles (et aucun autre quantificateur $\forall$ et $\exists$).

— $(n, m, p) \in T^{\mathbb{N}}$ si et seulement si $(f^n(x_0), f^m(x_0), f^p(x_0)) \in T^{\mathfrak{M}}$.

Autrement dit, on identifie n et $f^n(x_0)$.

Par construction $\mathbb{N}$ vérifie la formule ϕ ou plus exactement

$$\psi = \forall x \forall z\ (S(x, x+1) \wedge T(x, x+1, z) \wedge \neg T(x+1, x+1, z)) \vee \neg S(x, x+1)).$$

Question 21. *Montrer que la satisfiabilité de ψ est équivalente à un problème de pavabilité (d'un huitième de plan que l'on précisera).*

(On pourra observer qu'à x et z donnés, la véracité de la formule dépend uniquement de la valeur de T et de S sur les valeurs de $x, x+1$ et z).

Notes bibliographiques

Ce sujet est basé sur le document d'habilitation à diriger les recherches de Emmanuel Jeandel, en particulier du chapitre reprenant un article co-écrit avec Alexis Ballier paru dans *"Journées Automates Cellulaires (JAC) 2008"*, sur le cours *"Cellular Automata"* de Jarkko Karri, et enfin sur l'article *"Les dominos de Wang"* de Jean-Jacques Lévy, paru dans Quadrature 82(2011) 1-5. Sujet rédigé par Olivier Bournez, sur une idée de sujet proposée par Bruno Salvy.