École polytechnique — X2013— INF412 Fondements de l'informatique

Fondements de l'informatique: Examen
Durée: 3h

Sujet proposé par Olivier Bournez
Version 3
(corrigé)

L'énoncé comporte 4 parties (sections), certaines avec des sous-parties (sous-sections), chacune indépendante, qui pourront être traitées dans un ordre quelconque. En revanche, dans chaque partie, il peut être utile, dans la réponse à une question, d'utiliser les questions précédentes ! On pourra librement admettre le résultat d'une question pour passer aux questions suivantes. La difficulté des questions n'est pas une fonction linéaire ni croissante de leur numérotation.

Il est possible d'avoir la note maximale sans avoir répondu à toutes les questions. Les questions avec un barème plus élevé sont indiquées par le symbole $(*)$

On pourra utiliser les résultats et théorèmes démontrés en cours sans chercher à les redémontrer.

Dans tout l'énoncé, on demande des algorithmes et des solutions à un haut niveau : dans aucune des questions il n'est demandé de décrire complètement une machine de Turing, ni même d'en donner une description graphique ; on pourra se contenter pour décrire un algorithme de le décrire par exemple en français ou dans un langage de programmation classique comme JAVA, C ou CAML.

1 A propos de 007

Question 1. *Parmi les problèmes suivants, lesquels sont décidables, récursivement énumérables ou non-récursivement énumérables ? Justifier votre réponse.*

On considère des machines de Turing sur l'alphabet $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

1. *Déterminer si une machine de Turing M, partant sur le mot vide, est telle qu'à un certain instant son ruban contient quelque part le mot* 007.
2. *Déterminer si le langage accepté par une machine de Turing M contient le mot* 007.
3. *Déterminer si une machine de Turing M partant sur le mot* 007 *est telle que sa tête de lecture visite au plus* 700 *cases du ruban.*

Solution : La question 1. n'est pas décidable : le problème de l'arrêt des machines de Turing se réduit à ce problème. En effet, étant donnée une machine M et une entrée w, on peut construire une machine M' qui sur un ruban vide, simule M sur w, en codant les lettres $0, 1, \ldots, 9$ sur l'alphabet $0, 1$ (de façon à ne jamais écrire de 7 et donc de 007), et qui, si M accepte w écrit 007.

Le problème de la question 1. est récursivement énumérable : il est accepté par une machine qui simule M sur le mot vide, accepte si M écrit 007, et qui calcule (simule M) à jamais sinon.

La question 2. n'est pas décidable : il s'agit d'une application directe du théorème de Rice. Le problème est récursivement énumérable : il est accepté par une machine qui simule M sur le mot 007, et qui accepte si M l'accepte, et qui calcule (simule M) à jamais sinon.

La question 3. est décidable. En effet, une machine qui utilise/visite moins que 700 cases possède un nombre fini, disons T, de configurations possibles. Il suffit alors de simuler la machine de Turing M sur 007 sur au plus T étapes pour déterminer la réponse. $\square$

2 Gérer le catalogue des cours est difficile

On se place dans une école que l'on appellera Y.

Chaque semestre, on propose aux étudiants de Y un catalogue de cours. Chaque cours est constitué d'un nombre fini de séances. Chaque séance se déroule selon un horaire (intervalle de temps) précis.

On précise qu'il est impossible dans l'école Y de déplacer une séance de cours.

Dans tout ce qui suit, on suppose que chaque date est codée par un entier.

2.1 Le point de vue de l'étudiant

Pour valider un cours, chaque élève doit assister à toutes les séances du cours. L'objectif d'un étudiant de l'école Y est de valider le plus grand nombre de cours dans le semestre.

Le problème PLANNING que l'étudiant a à résoudre peut donc se modéliser de la façon suivante :

— **Donnée**: Un ensemble $\mathcal{S}$ de cours, chaque cours correspondant à un ensemble fini d'intervalles, chaque intervalle correspondant à une date de début et de fin d'une séance. Un entier k.

— **Réponse**: Décider s'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de cardinal $\geq k$ tel qu'il est possible de suivre tous les séances des cours de S' (c'est-à-dire tel qu'aucune séance des cours de S' ne se chevauche)

Question 2. $(*)$ *Prouver que le problème PLANNING est NP-complet.*

On admettra la NP-complétude du problème STABLE :

— ***Donnée**: Un graphe $G = (V, E)$ non-orienté et un entier k.*

— ***Réponse**: Décider s'il existe $V' \subset V$, avec $|V'| = k$, tel que $u, v \in V' \Rightarrow (u, v) \notin E$.*

Solution : Le problème est dans NP : la donnée d'un ensemble S constitue un certificat dont la validité est vérifiable facilement en temps polynomial.

A partir d'une instance (G, k) du problème STABLE, nous allons construire une instance (S, k) du problème PLANNING de la façon suivante :

— on considère que l'ensemble des cours est l'ensemble V des sommets de G.

— pour chaque $i$ème arête (x, y) avec $1 \leq i \leq m$:

  — On ajoute la séance $[2 * i, 2 * i + 1]$ pour le cours x

  — On ajoute la séance $[2 * i, 2 * i + 1]$ pour le cours y

Il est facile de voir que cet algorithme est bien polynomial.

Une arête (x, y) du graphe G représente le fait qu'un élève ne peut pas suivre deux cours. En effet, durant le semestre, il existe un moment où deux séances de ces cours se déroulent en même temps.

Si l'ensemble A est un ensemble stable de taille i de G, alors A correspond à un ensemble de cours que l'élève peut suivre. Et réciproquement.

On a donc bien réduit STABLE à PLANNING. $\square$

2.2 Le point de vue de la scolarité

La personne qui gère l'affectation des salles de l'école Y possède de son côté s salles, et doit affecter à chaque séance une salle. Son problème est de comprendre si le nombre de salles est suffisant.

Elle a donc à résoudre le problème de décision AFFECTATION suivant (on suppose que tous les cours ont au moins un étudiant, et que toute séance peut avoir lieu dans n'importe quelle salle) :

— **Donnée**: Un ensemble $\mathcal{S}$ de cours, chaque cours correspondant à un ensemble fini d'intervalles, chaque intervalle correspondant à une date de début et de fin d'une séance ; Un entier s.

— **Réponse**: Décider s'il existe une façon de placer chacune des séances dans une des s salles de telle sorte qu'au plus une séance est affectée à chaque salle à tout moment.

Question 3. $(*)$ *Le problème AFFECTATION est-il NP-complet ? Si non, proposez un algorithme polynomial. Justifier.*

Indication : on pourra considérer les séances dans l'ordre de leur date de début.

Solution : Le problème est en fait dans P. Il n'est donc pas NP-complet (sauf si P=NP). Voici en effet un algorithme :

1. on trie les séances par date de début ;
2. on affecte les salles selon l'ordre obtenu par ce tri (bien entendu, une salle est libérée dès qu'une séance est terminée) ;
3. on calcule le nombre de salles utilisées par cette affectation ;
4. si ce nombre de salles est inférieur à s, alors on retourne vrai, sinon on retourne faux.

Cet algorithme est correct. En effet, la remarque clé est la suivante : l'algorithme considère bien une affectation optimale en nombre de salles. En effet, supposons qu'une séance v soit affectée dans une salle k. Puisque cette séance v n'a pas été affectée avant par l'algorithme c'est que la date de début a de cette séance tombe sur un moment où les salles 1 à $k-1$ sont utilisées. Les séances à ce moment là ont toute la date a en commun dans leur intervalle (par définition de la façon dont fonctionne l'algorithme). Il faut donc au moins k salles à ce moment là, et quoi que l'on fasse, dans toute affectation à ce moment là, le nombre de salles est au moins k. L'algorithme produit donc une solution nécessairement optimale.

L'algorithme est bien polynomial. □

3 Problèmes complets et difficiles pour RE

On dit qu'un problème A est *RE-complet* s'il est récursivement énumérable, et si tout problème récursivement énumérable B est tel que $B \leq_m A$. On dit qu'un problème A est *RE-difficile* si la seconde propriété est vraie : si tout problème récursivement énumérable B est tel que $B \leq_m A$.

Question 4. *Prouver que le problème* HALTING – PROBLEM *est* RE*-complet.*

Solution : (C'est prouvé dans le polycopié. Si l'on recopie :) HALTING – PROBLEM est semi-décidable. Maintenant, soit L un langage semi-décidable. Par définition, il existe une machine de Turing A qui accepte L. Considérons la fonction f qui à w associe le couple $(\langle A \rangle, w)$. On a $w \in L$ si et seulement si $f(w) \in$ HALTING – PROBLEM, et donc on obtient $L \leq_m$ HALTING – PROBLEM. □

Question 5. *Un problème* RE*-difficile peut-il être décidable ?*

Solution : HALTING – PROBLEM se réduit à ce problème. Si il était décidable, alors le problème HALTING – PROBLEM serait décidable. Absurde. □

Question 6. *Prouver la version suivante étendue du théorème de Rice :*

Soit une propriété P des langages semi-décidables non triviale, c'est-à-dire telle qu'il y a au moins une machine de Turing M telle que $L(M)$ satisfait P et une machine de Turing M' telle que $L(M')$ ne satisfait pas P.

Alors le problème de décision L_P :

— ***Donnée:*** *Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M ;*

— ***Réponse:*** *Décider si $L(M)$ vérifie la propriété P ;*

est RE-difficile ou son complémentaire est RE-difficile.

Solution : Il faut distinguer le cas où l'ensemble vide ne satisfait pas P et celui ou l'ensemble vide le satisfait.

Dans le premier cas : on a prouvé en cours dans la preuve du théorème de Rice que HALTING – PROBLEM $\leq_m L_p$. Par la question précédente, pour tout problème B récursivement énumérable, on a $A \leq_m$ HALTING – PROBLEM $\leq L_p$.

Dans le second cas : on raisonne sur son complémentaire. □

Question 7. *Démontrer que le problème suivant*

— ***Donnée:*** *Une machine de Turing $\langle M \rangle$*

— ***Réponse:*** *Décider si M accepte le mot $\langle M \rangle$*

est RE-*complet.*

Solution : Le problème est récursivement énumérable : il suffit de simuler M sur son codage, et accepter si et seulement si M accepte.

Le problème de l'arrêt, qui est RE-complet se réduit à ce problème : en effet, étant donnés une machine M et un mot w, on peut considérer la machine M_w qui sur toute entrée u simule M sur w, et si M accepte w accepte u, et sinon boucle. M_w accepte $\langle M \rangle$ (et en fait tout mot) si et seulement si M accepte w. La transformation de M et w en M_w est bien calculable. □

Question 8. *Y a-t-il un problème récursivement énumérable considéré en cours ou en TD (PC) que l'on a prouvé indécidable qui ne soit pas RE-complet. Justifier la réponse.*

Solution : Non, tous les problèmes récursivement énumérables indécidables considérés en cours ont été prouvés indécidables par réduction à partir de HALTING – PROBLEM ou de problèmes prouvés plus difficiles que celui-ci. Ils sont donc tous RE-complets.

Note culturelle : La question de l'existence de problèmes qui serait récursivement énumérables, non-décidables, mais non complets a été posée par Emile Post en 1944. Cette question est restée sans réponse pendant plus d'une décennie jusqu'à la construction obtenue de façon indépendante en 1956 par Albert Mučnik et en 1957 par Richard Friedberg d'un problème (artificiel) de ce type, à l'aide d'une méthode de diagonalisation très astucieuse, basée sur des priorités. On n'en connait pas de « naturels ». □

4 Définissabilité

L'objectif de cette partie est de prouver le résultat suivant, que l'on nommera résultat @ : *il n'existe pas de formule du premier ordre (i.e. du calcul des prédicats vu en cours) qui caractérise les graphes finis connexes.* Dit autrement : il n'existe pas de formule close du premier ordre (i.e.

du calcul des prédicats vu en cours) qui est satisfaite par tout graphe fini connexe, et qui n'est pas satisfaite par aucun graphe fini non-connexe.

On considère pour cela une signature Σ avec le symbole de relation R binaire, et le symbole d'égalité $=$ binaire, et aucun symbole de constante ou de fonction. On se restreint dans tout cet énoncé aux modèles égalitaires, c'est-à-dire aux modèles où l'interprétation de $=$ correspond à l'égalité. Les modèles (structures) pour cette signature Σ correspondent donc à des graphes orientés.

On confondra souvent dans la suite par conséquent graphes et structures sur cette signature. On notera souvent $G = (V, E)$ pour un graphe, où V est l'ensemble des sommets, et E des arêtes orientées (on appelle aussi parfois cela des arcs). On notera $E(x, y)$ ou $(x, y) \in E$ pour le fait qu'il y a une arête orientée de x vers y.

On rappelle qu'un *chemin* entre les sommets x et y d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite finie $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_k = y$ de sommets avec pour tout i, $(x_i, x_{i+1}) \in E$. Un tel chemin est dit de longueur k.

On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ est *connexe* si pour toute paire x et y de sommets de G, il y a un chemin entre x et y.

4.1 Un échauffement

Question 9. *On considère la signature Σ' obtenue en ajoutant à la signature Σ deux symboles de constantes c_1 et c_2. Un modèle sur la signature Σ' correspond donc à un graphe orienté, avec deux sommets distingués s_1 et s_2 : s_1 est donné par l'interprétation de c_1 et s_2 par l'interprétation de c_2.*

On fixe un entier d.

Produire une formule sur la signature Σ' qui est satisfaite si et seulement s'il y a un chemin de longueur d entre les sommets distingués s_1 et s_2.

Solution : Prendre $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_{d-1}(R(c_1, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge R(x_{d-1}, c_2))$. □

4.2 Une variante du résultat @

Si l'on ne fait pas l'hypothèse que les graphes sont finis [1], le résultat @ peut se prouver directement (via le théorème de compacité) :

Question 10. $(*)$ *Prouver qu'il n'existe pas de formule du premier ordre (i.e. du calcul des prédicats vu en cours) qui caractérise les graphes connexes : dit autrement, démontrer qu'il n'existe pas de formule close du premier ordre (i.e. du calcul des prédicats vu en cours) qui est satisfaite par tout graphe [2] connexe, et qui n'est pas satisfaite par aucun graphe [3] non-connexe.*

Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et chercher à exprimer l'inexistence d'un chemin entre deux sommets distingués s_1 et s_2 et utiliser le théorème de compacité du calcul des prédicats.

Solution : Supposons qu'il existe une telle formule Φ. On étend la signature avec deux symboles de constantes c_1 et c_2. On considère l'ensemble T de formules

$$\{\neg\phi_d | d \in \mathbb{N}, d > 1\} \cup \{\neg(c_1 = c_2)\} \cup \{\Phi\}$$

où les formules ϕ_d sont définies dans la question précédentes ($\neg\phi_d$ exprime donc la non-existence d'un chemin de longueur d dans le graphe entre les sommets correspondant respectivement à c_1 et c_2).

1. Un graphe est dit fini si son nombre de sommets est fini.
2. fini ou infini
3. fini ou infini

L'ensemble T est consistant : en effet, par le théorème de compacité, il suffit de montrer que tout sous-ensemble fini de T est consistant. C'est bien le cas, car pour un tel sous-ensemble T' fini, on peut considérer N l'entier tel que si $\neg\phi_d \in T'$, alors $d < N$. Alors un graphe connexe dans lequel le plus court chemin entre c_1 et c_2 est de longueur $N+1$ est un modèle de T'.

Puisque T est consistant, il possède un modèle. Ce modèle est connexe, mais il n'y a aucun chemin entre c_1 et c_2 de longueur n pour tout n. Impossible. □

Observons que cela n'implique pas le résultat @ : le fait qu'il n'existe pas de formule du premier ordre qui caractérise la propriété d'être connexe pour un graphe (fini ou infini) n'implique pas qu'il n'y a pas de formule du premier ordre qui caractérise la propriété d'être connexe pour un graphe **fini**. Aussi, on va développer plusieurs résultats dans la suite pour prouver le résultat @.

4.3 Une première remarque

Question 11. *Soit ϕ une formule sur la signature Σ.*

Expliquer pourquoi toute formule atomique qui apparait dans ϕ (i.e. toute sous-formule de ϕ) est de l'une des deux formes suivantes :

1. *$x = y$ où x, y sont des variables ;*
2. *$R(x, y)$, où x, y sont des variables.*

Solution : Sur la signature Σ, il n'y a aucun symbole de fonction, ni de constante. Les termes sont donc nécessairement des variables. Par ailleurs, il n'y a que deux symboles de relations R et $=$ d'arité 2. Ce ne sont donc que les deux seules possibilités pour former une formule atomique. □

4.4 Rang de quantification

On dit que deux structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sur une même signature sont élémentairement équivalentes, noté $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ si pour toute formule close ϕ, ϕ est satisfaite dans $\mathcal{S}_1$ si et seulement si ϕ est satisfaite dans $\mathcal{S}_2$.

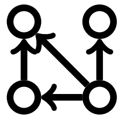
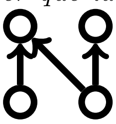
Le *rang* $rg(\phi)$ d'une formule ϕ (du calcul des prédicats) se définit inductivement comme suit (c'est le nombre maximal de quantificateurs sur un chemin si l'on voit la formule comme un arbre) :

— $rg(\phi) = 0$ si ϕ est une formule atomique
— $rg(\phi \wedge \psi) = rg(\phi \vee \psi) = rg(\phi \Rightarrow \psi) = rg(\phi \Leftrightarrow \psi) = \max(rg(\phi), rg(\psi))$
— $rg(\exists x\ \phi) = rg(\forall x\ \phi) = 1 + rg(\phi)$

Une formule sans quantificateur est en particulier par définition une formule ϕ avec $rg(\phi) = 0$.

Soit r un entier. Deux structures $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ seront dites *r-indistinguables* si pour toute formule close ϕ telle que $rg(\phi) \leq r$, on a que ϕ est satisfaite dans $\mathcal{S}_1$ si et seulement si ϕ est satisfaite dans $\mathcal{S}_2$. On dit qu'elles sont *r-distinguables* dans le cas contraire : il y a donc une formule close ϕ, avec $rg(\phi) \leq r$, qui est satisfaite dans l'une et pas dans l'autre.

Observons que par définition, $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2$ si et seulement si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont *r-indistinguables* pour tout entier r.

Question 12. *Montrer que la structure correspondant au graphe*  *et la structure correspondant au graphe*  *sur la signature Σ sont 2-distinguables.*

Solution : La formule $\exists x \forall y (\neg(x = y) \Rightarrow R(x, y))$ les différencie. Cette formule est de rang 2. □

4.5 Isomorphismes partiels et 0-distinguabilité

Un *isomorphisme partiel* h d'un graphe orienté $G_1 = (V_1, E_1)$ dans un graphe orienté $G_2 = (V_2, E_2)$ est une fonction partielle injective h de V_1 dans V_2 telle que pour tout x, y dans le domaine de h,

$$E_1(x, y) \text{ si et seulement si } E_2(h(x), h(y)).$$

Lorsque ϕ est une formule de variables libres $x_1, \ldots, x_n$, et G est une structure (i.e. dans notre contexte un graphe orienté), $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des éléments du domaine de la structure (i.e. dans notre contexte des sommets), on écrira $G, \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\} \models \phi$ lorsque la formule ϕ est satisfaite sur G pour la valuation qui envoie x_i sur a_i.

Les isomorphismes partiels sont suffisants pour caractériser la 0-distinguabilité :

Question 13. *Soient $a_1, \ldots, a_n \in V_1$ et $b_1, \ldots, b_n \in V_2$ où $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont deux graphes orientés.*

On considère la fonction partielle h définie par $h(a_i) = b_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ (et de domaine exactement $\{a_1, \ldots, a_n\}$).

Montrer que h est un isomorphisme partiel de G_1 dans G_2 si et seulement si pour toute formule ***sans quantificateur*** *ϕ de variables libres $x_1, \ldots, x_n$*

$$G_1, \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\} \models \phi \textit{ si et seulement si } G_2, \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\} \models \phi$$

Solution : On note $\sigma_1 = \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\}$ et $\sigma_2 = \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_n \mapsto b_n\}$. Si h est un isomorphisme partiel, alors

- $a_i = a_j$ ssi $b_i = b_j$ (car h est injective) et donc $G_1, \sigma_1 \models x_i = x_j$ ssi $G_2, \sigma_2 \models x_i = x_j$
- $E_1(a_{i_1}, a_{i_2})$ ssi $E_2(b_{i_1}, b_{i_2})$. Donc $G_1, \sigma_1 \models R(x_{i_1}, x_{i_2})$ ssi $G_2, \sigma_2 \models R(x_{i_1}, x_{i_2})$.

On en déduit $\mathcal{S}_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2, \sigma_2 \models \phi$, pour toute formule ϕ sans quantificateur par une induction directe.

Réciproquement, si pour toute formule atomique sans quantificateur $\mathcal{S}_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $\mathcal{S}_2, \sigma_2 \models \phi$, c'est vrai en particulier pour les formules $R(x, y)$.

□

4.6 Jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé

Un jeu (de EF) est un jeu qui se joue avec deux joueurs, l'un appelé S (spoiler) et l'autre D (duplicator). Il se joue sur deux graphes orientés $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

On fixe un entier r, que l'on appelle *nombre de tours de jeu* (on dit aussi *nombre de coups*). Pour $i = 1$ à r,

- S choisit un élément dans le domaine de l'une des deux structures : c'est-à-dire, soit il décide de choisir un élément dans V_1, soit il décide de choisir un élément dans V_2.

  Dans le premier cas, on appellera cet élément a_i, et dans le second b_i.
- D choisit ensuite un élément dans le domaine de l'autre structure : si S avait choisit a_i dans V_1, D choisit un élément que l'on appelle b_i dans V_2. Si S avait choisit b_i dans V_2, D choisit un élément que l'on appelle a_i dans V_1.

Pour déterminer qui a gagné, on fait ainsi : on considère la fonction partielle h définie par $h(a_i) = b_i$ (et pas définie ailleurs, i.e. le domaine de h est $\{a_1, \ldots, a_r\}$). Le joueur D gagne si h est un isomorphisme partiel de G_1 dans G_2.

Une *stratégie gagnante* (pour le jeu à r tours de jeu) pour le joueur D est une manière systématique de jouer qui lui permet de gagner, quelle que soit la manière de jouer du joueur S.

Question 14. *On considère les deux structures de la question 12. Montrer que S peut gagner le jeu à 2 tours de jeu (= D n'a pas de stratégie gagnante pour $r = 2$). Montrer que par contre, S ne gagne jamais le jeu à 1 tour de jeu (= D possède bien une stratégie gagnante pour $r = 1$).*

Solution : S gagne le jeu en 2 coups en jouant de la façon suivante. Il joue le sommet a_1 en bas à droite du premier graphe. D doit répondre par un sommet b_1 du second graphe.

Si b_1 n'est pas le sommet en bas à gauche du second graphe, S peut jouer le sommet b_2 en bas à gauche du second graphe. S'il le joue, D doit répondre par un sommet a_2. S a gagné quel que soit ce choix a_2, car il y a une arête de a_1 vers n'importe quel sommet, et donc a_2, alors qu'il n'y a pas d'arête entre b_1 et b_2.

Si b_1 est le sommet en bas à gauche du second graphe, S peut joueur le sommet b_2 en haut à droite du second graphe. D doit répondre par un sommet a_2. S a gagné quel que soit ce choix a_2, car il y a une arête de a_1 vers n'importe quel sommet, et donc a_2, alors qu'il n'y a pas d'arête entre b_1 et b_2.

Pour le jeu en 1 coup, quel que soit le choix de S, si D choisit le même sommet dans l'autre graphe, il gagne. □

Question 15. $(*)$ *Soient n et r deux entiers.*

Soient $a_1, \ldots, a_n \in V_1$ et $b_1, \ldots, b_n \in V_2$ où $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont deux graphes orientés.

On suppose que le joueur D possède une stratégie gagnante pour le jeu à $n + r$ tours de jeu sur G_1 et G_2 (c'est-à-dire, plus formellement : en supposant les choix fixés pour les n premiers tours de jeu par les $a_1, \ldots, a_n \in V_1$ et $b_1, \ldots, b_n \in V_2$, D est toujours capable de jouer pour les r tours de jeu restants de façon à gagner quels que soient les choix de S).

Prouver par induction que pour toute formule ϕ sans quantificateur universel, de rang $\leq r$, dont les variables libres sont $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$G_1, \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n\} \models \phi \text{ si et seulement si } G_2, \{x_1 \mapsto h(a_1), \ldots, x_n \mapsto h(a_n)\} \models \phi.$$

Solution : La démonstration se fait par récurrence sur r et par induction sur la formule ϕ.

On notera $\sigma_1 = \{x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_k \mapsto a_k\}$ et $\sigma_2 = \{x_1 \mapsto b_1, \ldots, x_k \mapsto b_k\}$, où $b_i = h(a_i)$.

- Le cas $r = 0$ est donné par la question 13
- Si $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, alors $G_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $G_1, \sigma_1 \models \phi_1$ ssi (par hypothèse d'induction) $G_2, \sigma_2 \models \phi_1$ et $G_1, \sigma_1 \models \phi_2$ ssi (par hypothèse d'induction) $G_2, \sigma_2 \models \phi_2$, c'est-à-dire exactement ssi $G_2, \sigma_2 \models \phi_1 \wedge \phi_2$.
- Le cas de d'une disjonction, implication, équivalence est parfaitement similaire
- Si $\phi = \neg\psi$, alors $G_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $G_1, \sigma_1 \not\models \psi$. Par hypothèse de récurrence, $G_1, \sigma_1 \not\models \psi$ ssi $G_2, \sigma_2 \not\models \psi$, et donc $G_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi $G_2, \sigma_2 \models \phi$.
- Si $\phi = \exists x\ \psi$, alors $G_1, \sigma_1 \models \phi$ ssi il existe un a dans V_1 tel que $G_1, \sigma_1 \cup \{x \mapsto a\} \models \psi$. Soit alors $b \in V_2$ déterminé par l'élément joué par D dans le cas où S joue $a \in V_1$.
  L'isomorphisme partiel h de domaine $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de V_1 dans V_2 défini par $h(a_i) = b_i$ s'étend en un isomorphisme partiel avec $h(a) = b$ (puisque S possède une stratégie gagnante).
  La formule ψ est de rang $r-1$, et possède $n+1$ variables libres. On a bien $n+r = n+1+r-1$. L'hypothèse d'induction s'applique est donne
  $G_1, \sigma_1 \cup \{x \mapsto a\} \models \psi$ ssi $G_2, \sigma_2 \cup \{x \mapsto b\} \models \psi$, et donc $G_2, \sigma_2 \models \exists x\ \phi$. La réciproque se prouve de même.

□

Le résultat reste vrai en supprimant l'hypothèse "sans quantificateur universel", puisque $\forall x \phi$ est logiquement équivalent à $\neg\exists\neg\phi$ qui est de même rang.

Question 16. *Prouver que si le joueur D possède une stratégie gagnante pour le jeu à r tours de jeux, alors G_1 et G_2 sont r-indistinguables.*

Solution : C'est le cas $n = 0$ dans la question précédente. □

4.7 La connexité n'est pas définissable

Question 17. *On considère un graphe G_1 qui correspond au cycle avec 5 sommets : c'est-à-dire le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ dont les sommets sont $V_1 = \{s_1, \ldots, s_5\}$, et dont l'ensemble des arêtes est $E_1 = \{(s_1, s_2), (s_2, s_3), (s_3, s_4), (s_4, s_5), (s_5, s_1)\}$.*

On considère le graphe G_2 avec 10 sommets constitué de deux copies disjointes du graphe précédent, c'est-à-dire de 2 cycles disjoints à 5 sommets.

Montrer que, quels que soient les deux sommets distincts b_1 et b_2 choisis dans G_2, on peut trouver deux sommets a_1 et a_2 dans G_1 tels que la fonction partielle définie par $h(a_1) = b_1$, $h(a_2) = b_2$ (et de domaine $\{a_1, a_2\}$) soit un isomorphisme partiel de G_1 dans G_2.

Qu'en est-il si on avait considéré le cycle à 3 sommets au lieu de 5 (G_2 étant toujours 2 copies disjointes, i.e. un graphe à 6 sommets) ?

Solution : Si b_1 et b_2 sont sur le même cycle, il suffit de prendre a_1 et a_2 comme les sommets correspondants dans G_1.

Si b_1 et b_2 ne sont pas sur le même cycle. On prend a_1 comme le point correspondant à b_1 dans G_1, et on prend a_2 comme l'un des points à distance 2 de b_1 dans G_1. On vérifie exactement toutes les conditions nécessaires.

Cela ne serait pas possible pour 3 sommets, car en choisissant b_1 et b_2 sur des cycles différents, on n'aurait pas d'arête entre b_1 et b_2, mais nécessairement une arête entre a_1 et a_2, et donc pas un isomorphisme partiel. $\square$

Question 18. $(*)$ *On fixe un entier r. On considère un entier $r' > r2^{r+1}$. On considère le cycle G_1 avec r' sommets : c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont $s_1, \ldots, s_{r'}$, et dont l'ensemble des arêtes est $\{(s_i, s_{i+1}) | 1 \leq i \leq r' - 1\} \cup \{(s_{r'}, s_1)\}$.*

On considère le graphe G_2 avec $2r'$ sommets constitué de deux copies disjointes du graphe précédent, i.e ; de 2 cyles disjoints à r' sommets.

Expliquer pourquoi D possède une stratégie gagnante pour le jeu à r tours de jeu sur les graphes G_1 et G_2.

Solution : Notons $d_i(s, s')$ la distance de deux sommets dans le graphe G_i (que l'on peut prendre comme $+\infty$ si il n'y a pas de chemin entre s et s'). Le principe est de construire une stratégie pour D qui garantie la propriété suivante : après k tours, si les suites $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ de sommets ont été séléctionnés, alors pour tout i, j, ou bien $d_1(a_i, a_j) < 2^{r-k+1}$ et dans ce cas $d_1(a_i, a_j) = d_2(b_i, b_j)$, ou bien $d_1(a_i, a_j) \geq 2^{r-k+1}$ et dans ce cas $d_2(a_i, a_j) \geq 2^{r-k+1}$: il n'est pas très difficile de construire une telle stratégie, le principe étant de distinguer à chaque étape si l'on est « près » ou non d'un point déjà choisi. Quand on est « près », comme on divise par deux à chaque étape les distances, on est certain de pouvoir choisir un point à même distance dans l'autre structure car localement on est fortement isomorphe. Quand on est « loin » (I.e ; pas « près » de tout point déjà choisi), il suffit de prendre un point suffisamment loin de tous les points déjà choisis dans l'autre structure. Les conditions sur r' garantissent que cela reste toujours possible.

Une fois cette stratégie construite, il reste à se convaincre qu'elle est gagnante : après r tours, puisque 2^{r-k+1} vaut alors 2, il existe une arête de a_i à a_j ssi il existe une arête de b_i à b_j : la fonction h qui envoie chaque a_i sur b_i est donc bien un isomorphime partiel. $\square$

Question 19. *En déduire le résultat @.*

Solution : Par l'absurde : supposons qu'il y a une formule qui caractérise les graphes finis connexes des graphes finis non-connexes. Soit r son rang.

Par la question 16, les deux structures de la question précédente pour le r correspondant sont r-indistinguables. Or l'une est connexe, et pas l'autre.

Absurde. $\square$

Remarques

La section 4 est fortement inspirée du chapitre 11 du cours de Logique de Hubert Common, et de la présentation des résultats dans le livre « Logique et complexité » de Richard Lassaigne et Michel de Rougemont, éditions Hermès. □