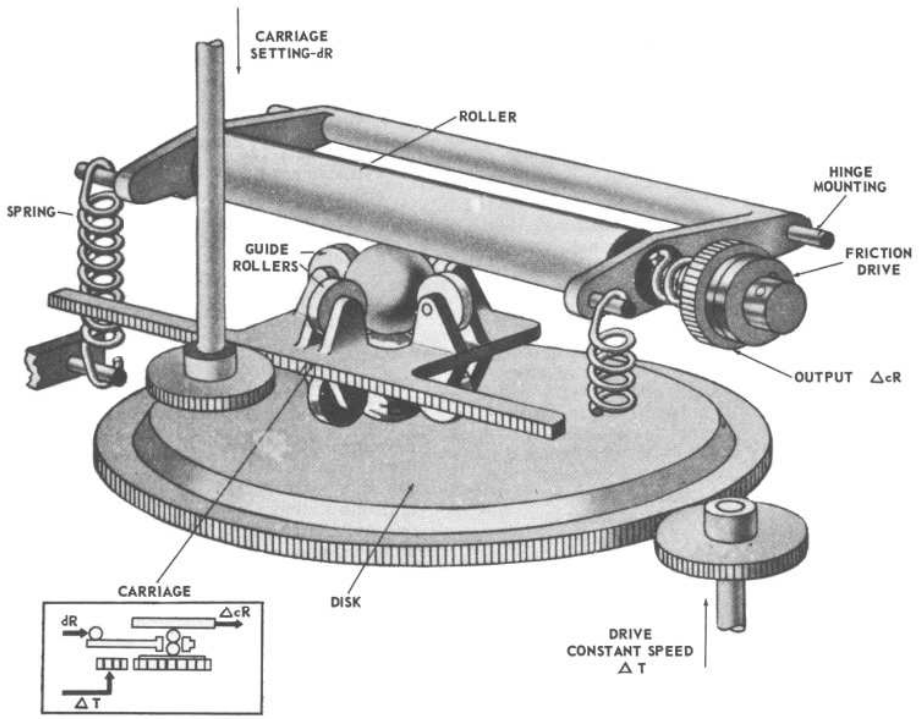
Cours 8: Complexité en temps. NP-complétude.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
CSC_INF41012_EP

Au menu

Complexité en temps

La classe P

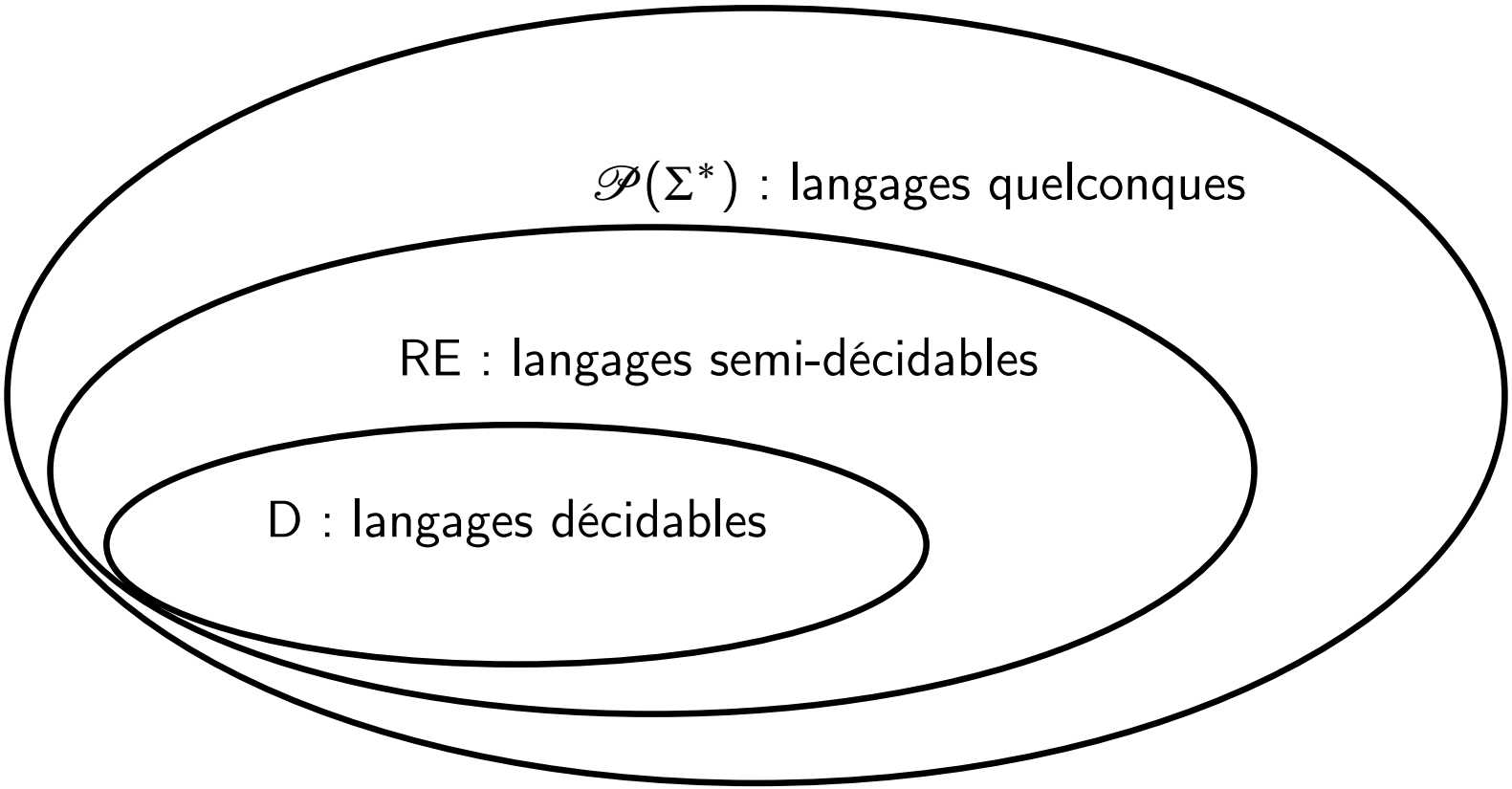
La classe NP

NP-complétude

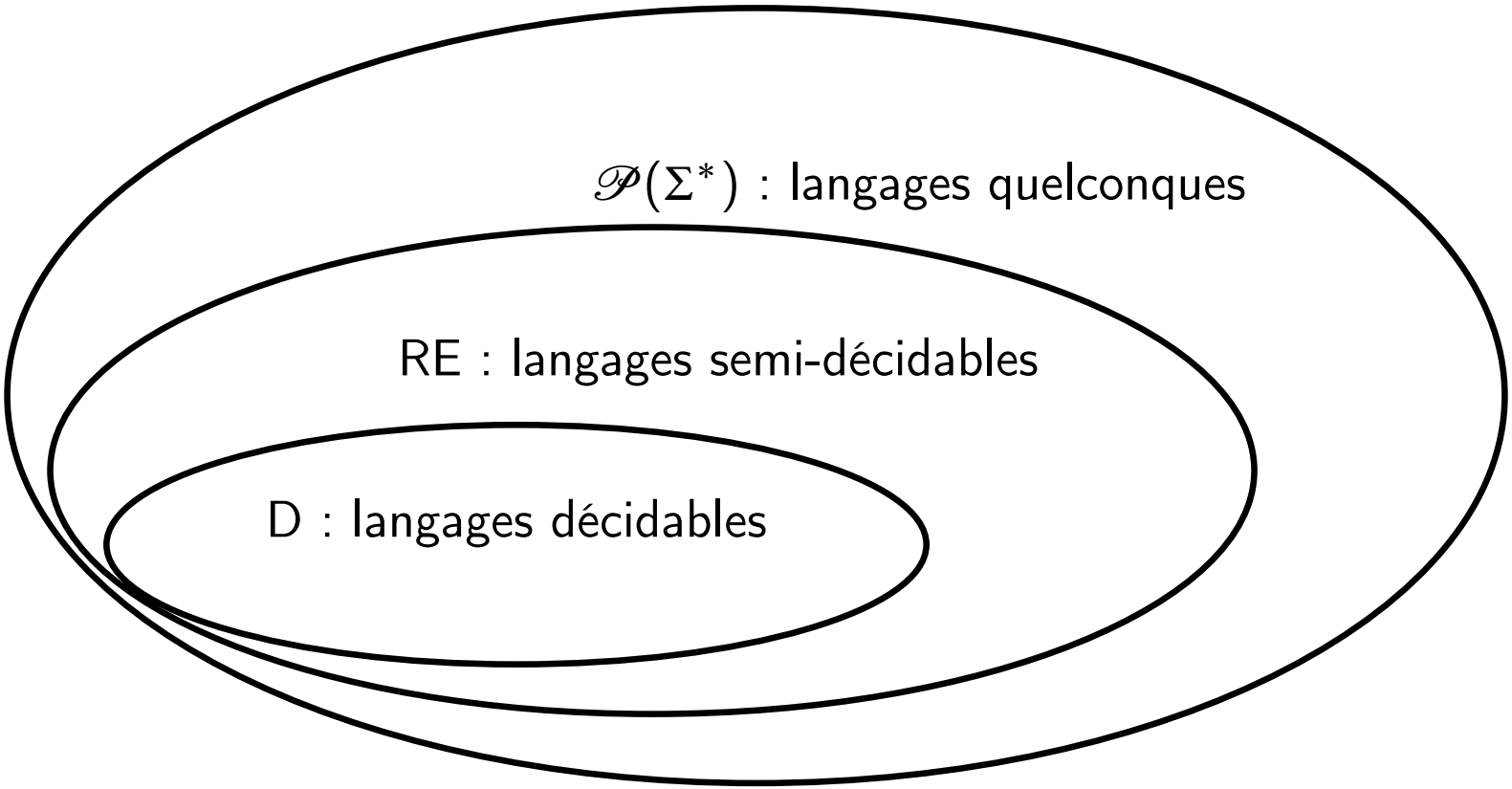
Quelques autres problèmes NP-complets célèbres

Plus précisément

Le paysage de la calculabilité

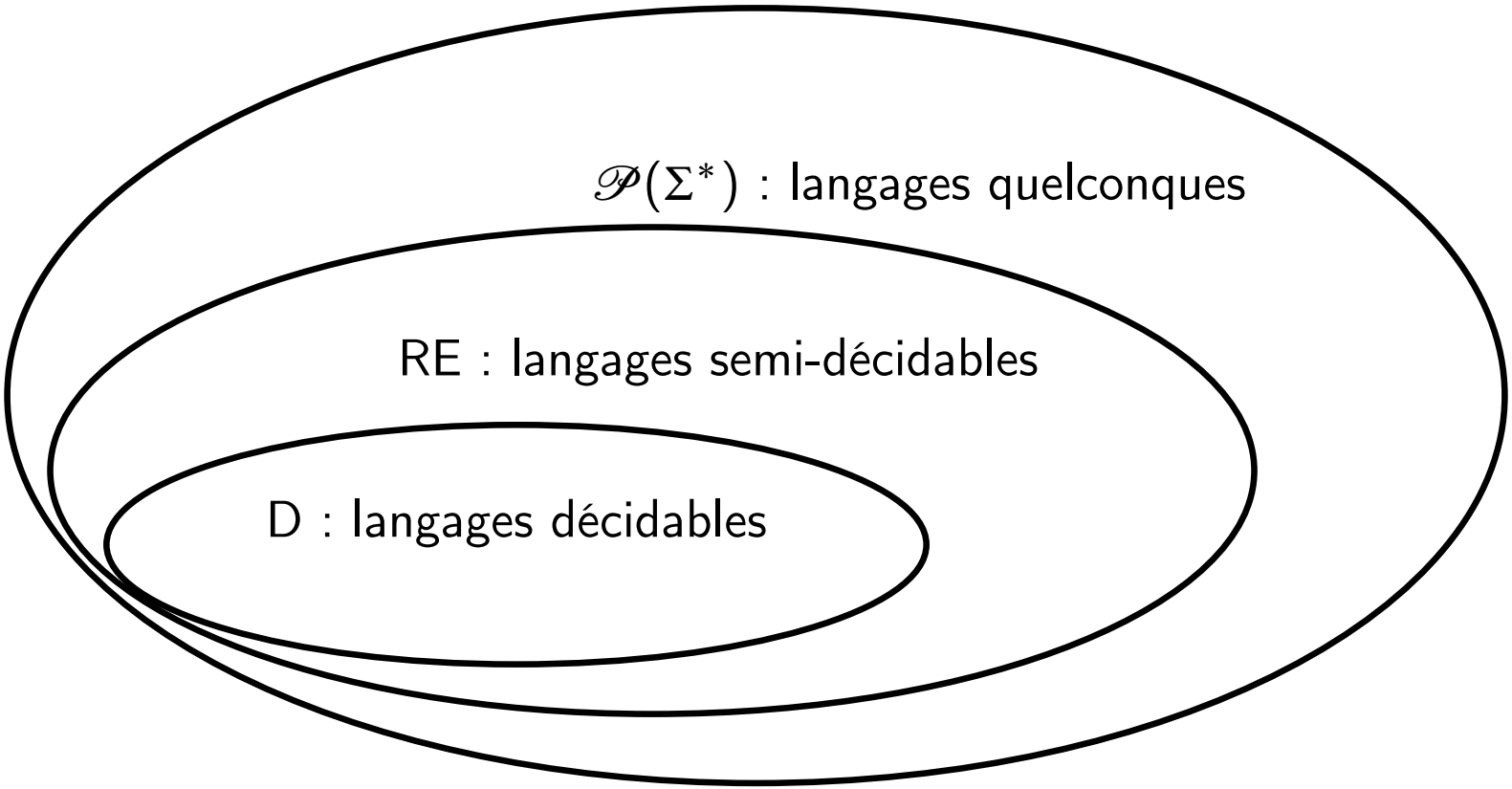


Le paysage de la calculabilité



On ne considère dorénavant que les problèmes de D : les langages décidables.

Le paysage de la calculabilité : vers de la complexité



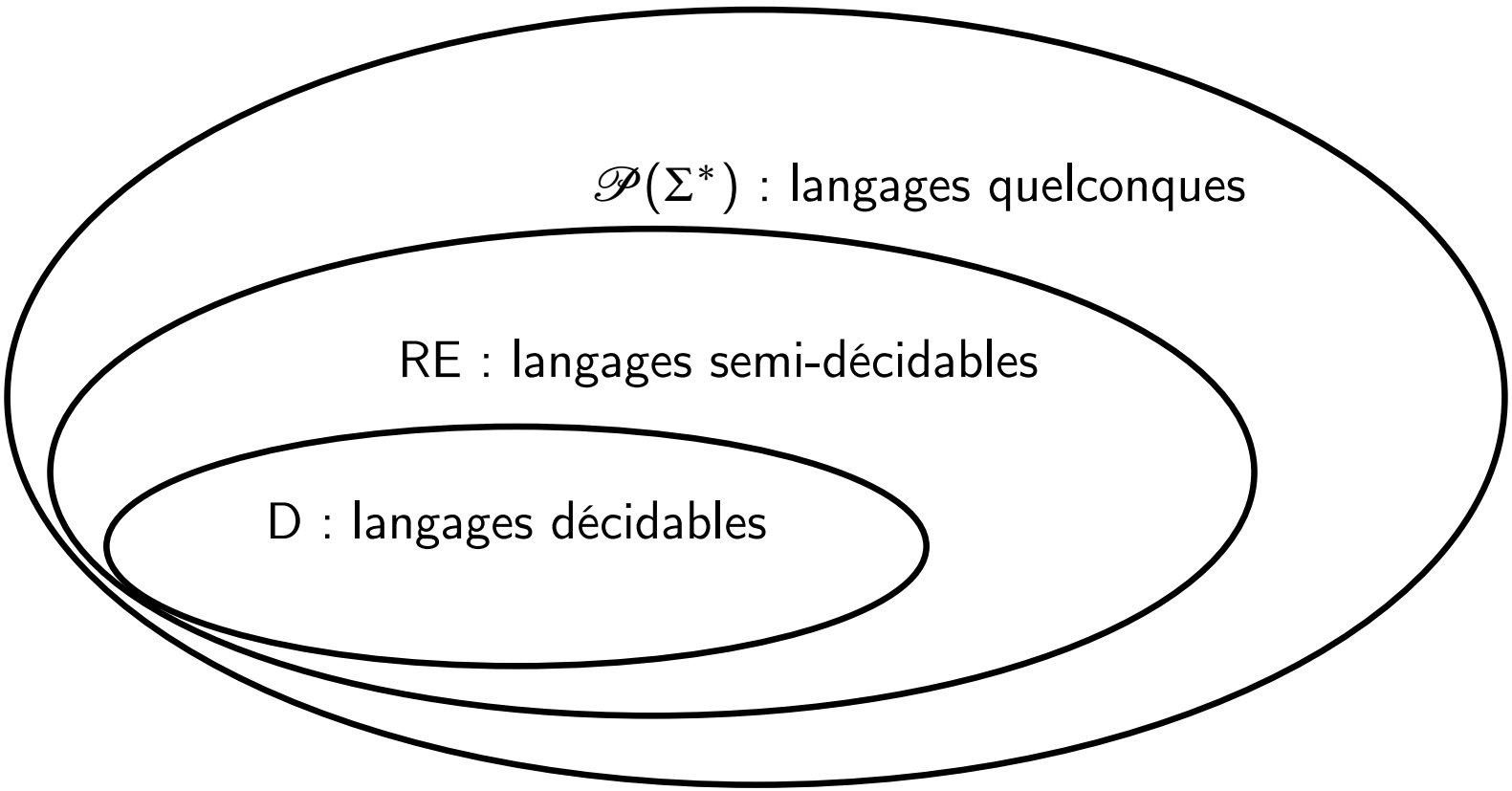
On ne considère dorénavant que les problèmes de D : les langages décidables. On souhaite une classification plus fine, qui prenne en compte les ressources utilisées.

La suite de ce cours

- On souhaite parler d'une ressource particulière : le **temps de calcul**.

La suite de ce cours

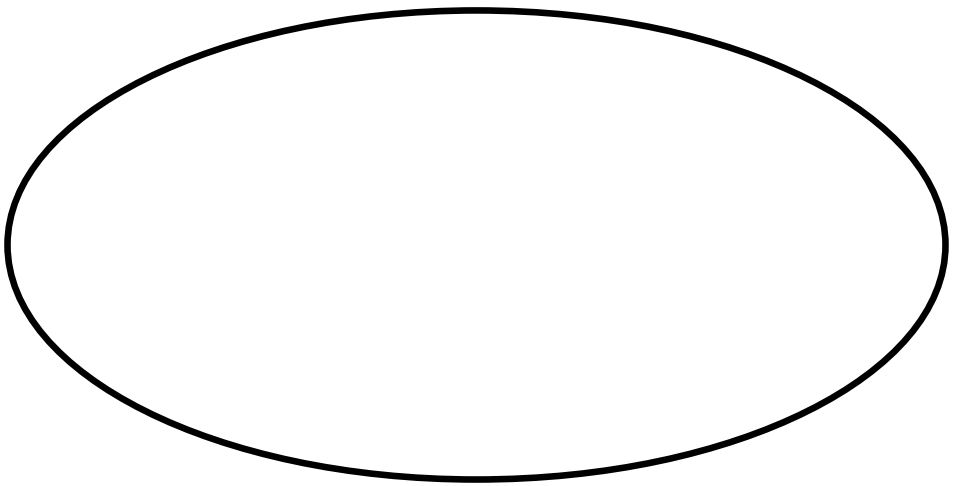
- On souhaite parler d'une ressource particulière : le **temps de calcul**.
- Objectif :
  - distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul.



La suite de ce cours

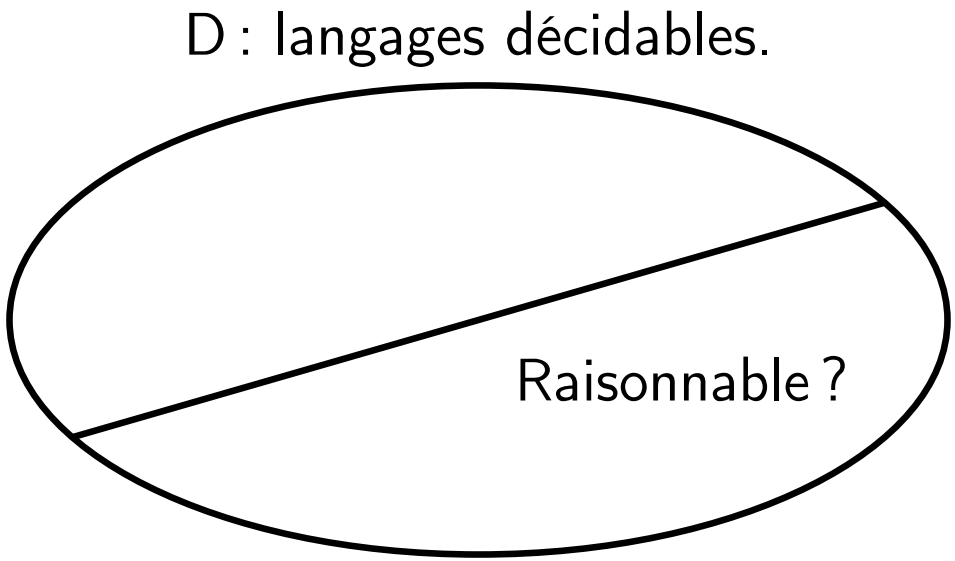
- On souhaite parler d'une ressource particulière : le **temps de calcul**.
- Objectif :
  - distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul.

D : langages décidables.



La suite de ce cours

- On souhaite parler d'une ressource particulière : le **temps de calcul**.
- Objectif :
  - distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en termes de temps de calcul.



Plus précisément

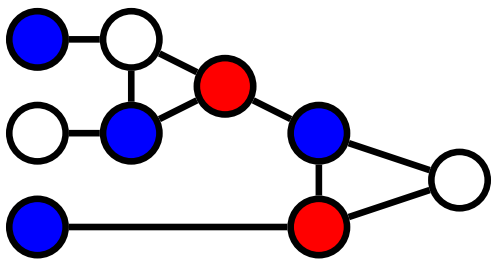
Complexité en temps
- Objectif du cours
- Deux exemples
- Une convention
- Pourquoi cette convention ?

Exemple 1 : tester le coloriage d'un graphe

- BON COLORIAGE :

Donnée:
1. Un graphe (fini) $G = (V, E)$ de n sommets et m arêtes.
2. avec la donnée pour chaque sommet $v \in V$ d'une couleur.

Réponse: Décider si cela correspond à un coloriage de G : c'est-à-dire si il n'y a pas d'arêtes de G avec deux extrémités de la même couleur.

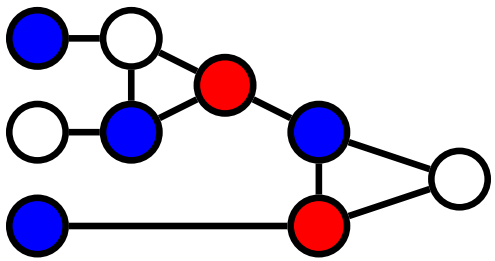


Exemple 1 : tester le coloriage d'un graphe

- BON COLORIAGE :

Donnée:
1. Un graphe (fini) $G = (V, E)$ de n sommets et m arêtes.
2. avec la donnée pour chaque sommet $v \in V$ d'une couleur.

Réponse: Décider si cela correspond à un coloriage de G : c'est-à-dire si il n'y a pas d'arêtes de G avec deux extrémités de la même couleur.



Algorithme :

- res :=vrai.
- pour chaque arête (u, v)
  - si $couleur(u) = couleur(v)$ alors res :=faux.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}(m)$.
  - $\mathcal{O}(n^2)$ (car $m \leq n(n-1)/2 \leq n^2$).

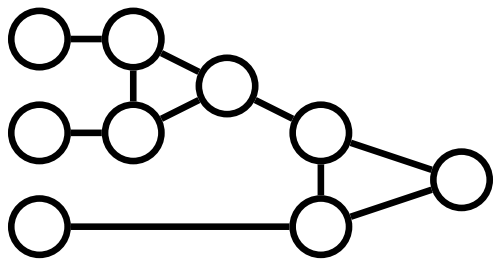
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.

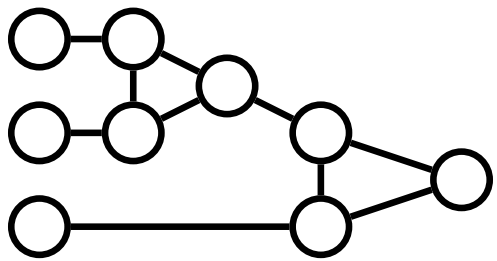


Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

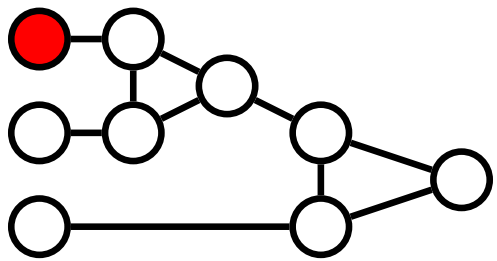
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

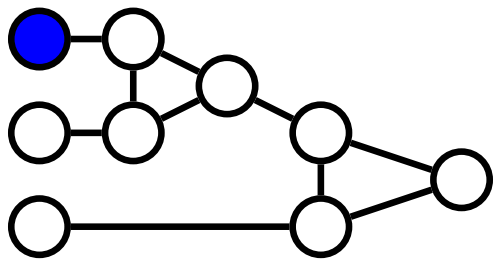
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

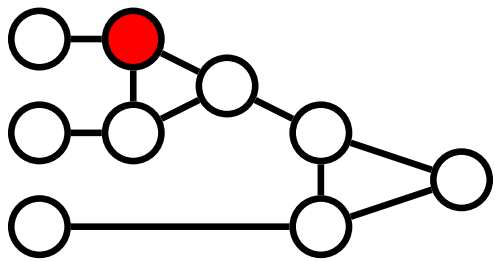
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

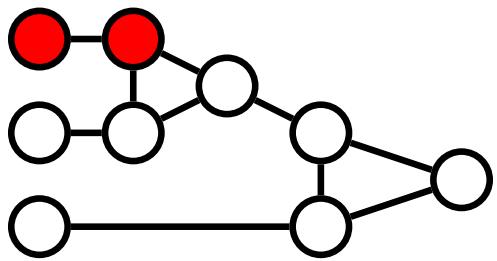
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

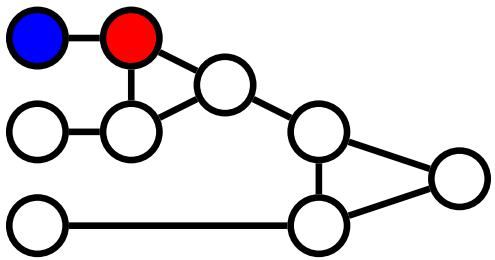
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

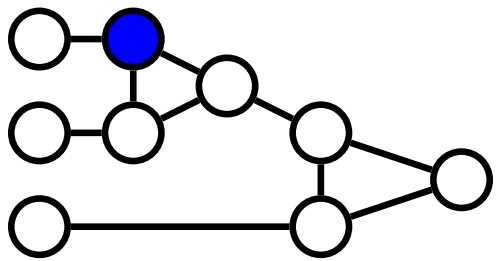
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

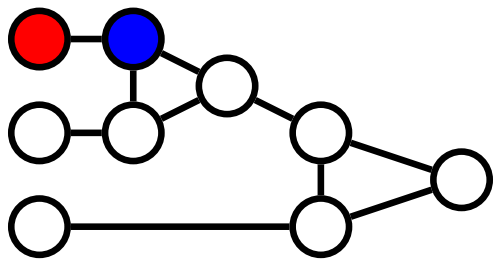
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

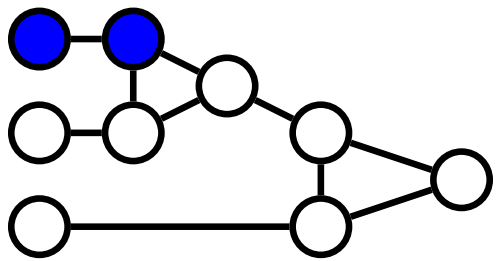
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

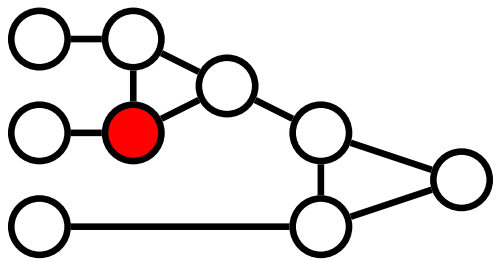
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

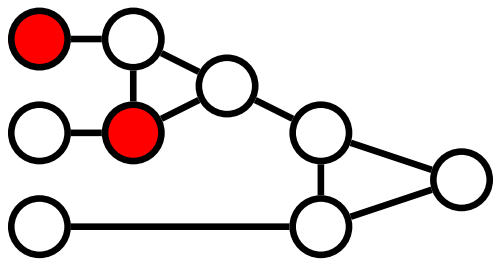
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

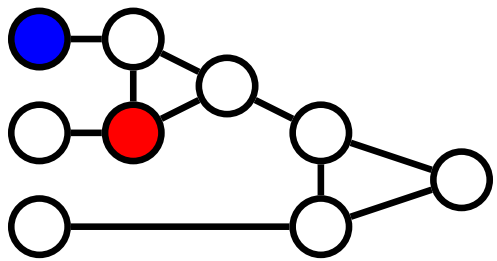
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

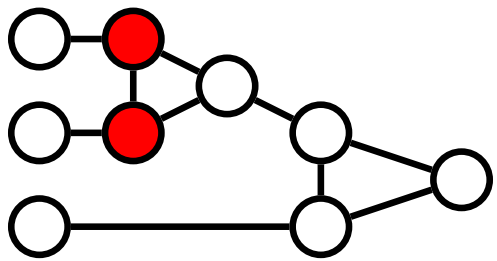
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

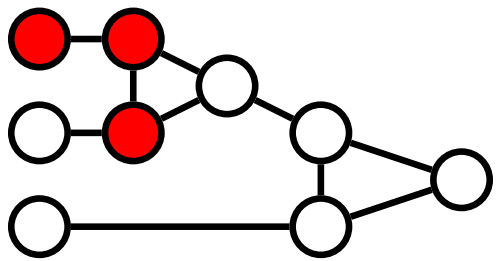
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

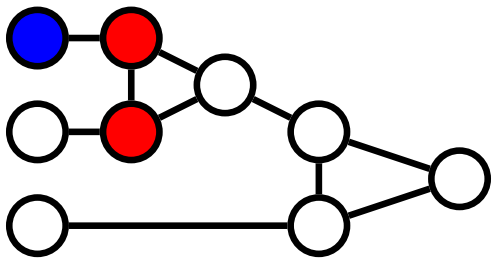
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

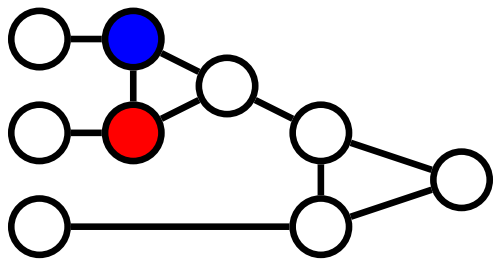
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

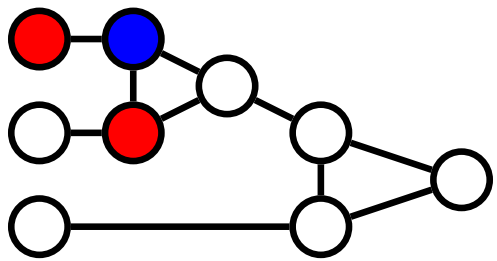
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

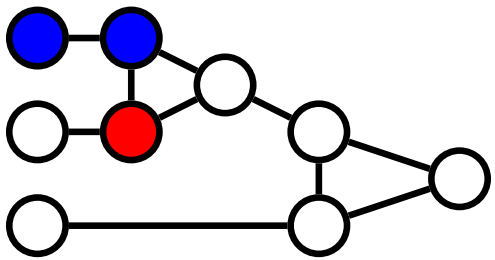
a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Exemple 2 : 3-COLORABILITE

- 3-COLORABILITE :

Donnée: Un graphe (fini) $G = (V, E)$.

Réponse: Décider s'il existe un coloriage du graphe utilisant au plus 3 couleurs.



Algorithme :

- res :=faux.
- pour les 3^n façons possibles d'affecter une couleur à chaque sommet
  - tester si cela est un coloriage de G.
  - si oui alors res :=vrai.
- retourner res.

- Complexité de l'algorithme (en nombre d'instructions effectuées [a]) :
  - $\mathcal{O}\left(3^n \times n^2\right) = \mathcal{O}\left(3^{(1+\epsilon)n}\right)$

  où n est le nombre de sommets.

a. On suppose qu'accéder à une arête se fait en temps constant

Quelques considérations

- Pour un processeur capable d'effectuer un million d'instructions élémentaires par seconde.

	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n=10$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	4 s
$n=30$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	18 m	10^{25} a
$n=50$	<1 s	<1 s	<1 s	<1 s	11 m	36 a	∞
$n=10^2$	<1 s	<1 s	<1 s	1s	12.9 a	10^{17} a	∞
$n=10^3$	<1 s	<1 s	1s	18 m	∞	∞	∞
$n=10^4$	<1 s	<1 s	2 m	12 h	∞	∞	∞
$n=10^5$	<1 s	2 s	3 h	32 a	∞	∞	∞
$n=10^6$	1s	20s	12 j	31710 a	∞	∞	∞

- Notations : ∞ = le temps dépasse 10^{25} années, s= seconde, m= minute, h = heure, a = an.

Plus précisément

Complexité en temps

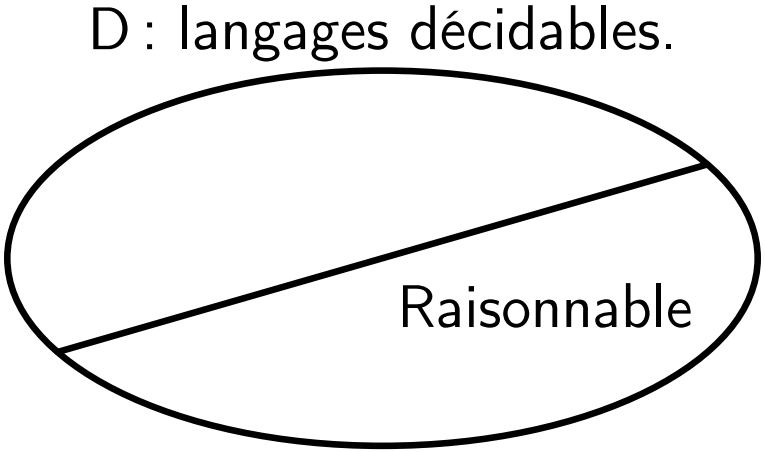
- Objectif du cours
- Deux exemples
- Une convention
- Pourquoi cette convention ?

Une convention

- La **convention** suivante s'est imposée en informatique :
  - Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ pour un entier k.

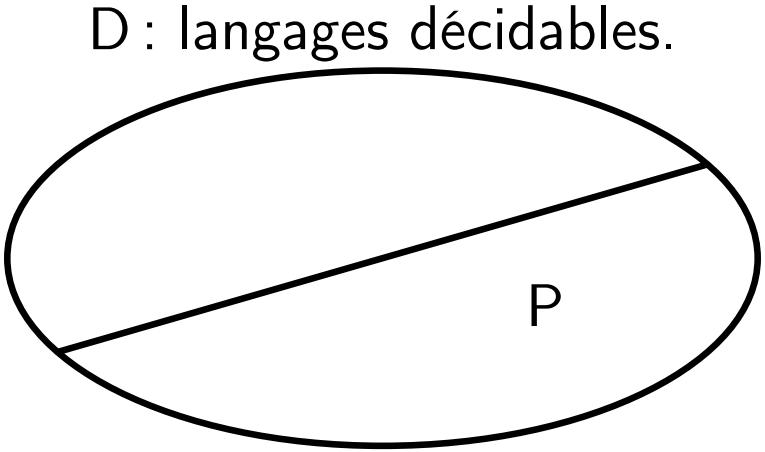
Une convention

- La **convention** suivante s'est imposée en informatique :
  - Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



Une convention

- La **convention** suivante s'est imposée en informatique :
  - Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ pour un entier k.
- Graphiquement :

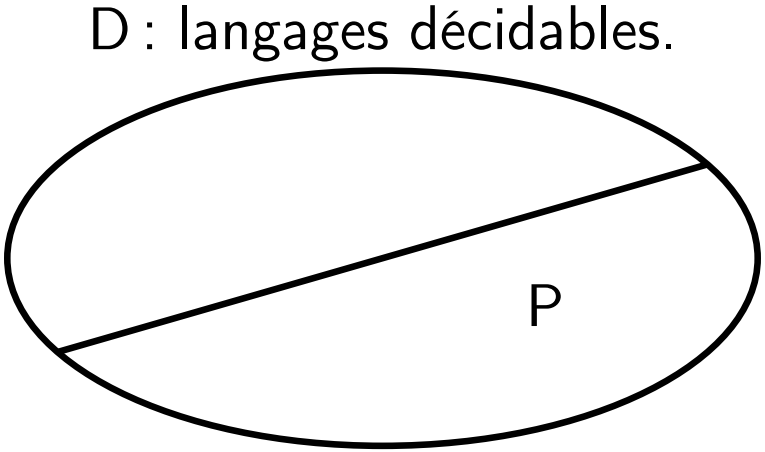


P = problèmes avec un algorithme polynomial en temps.

- Exemples :

Une convention

- La **convention** suivante s'est imposée en informatique :
  - Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ pour un entier k.
- Graphiquement :

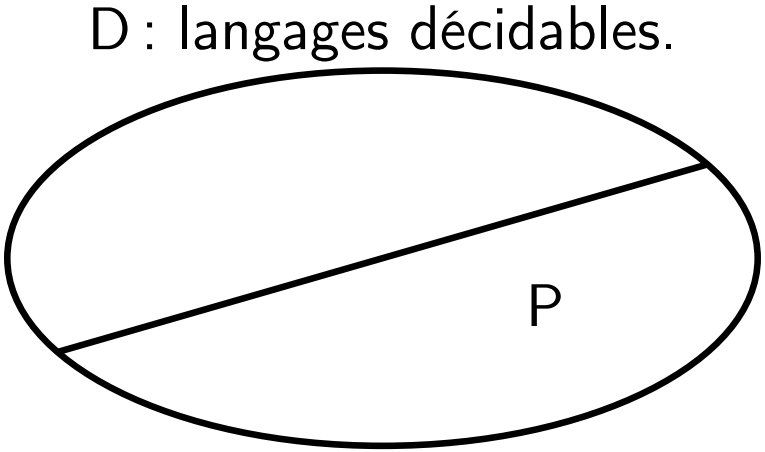


P = problèmes avec un algorithme polynomial en temps.

- Exemples :
  - BON COLORIAGE est dans P.

Une convention

- La **convention** suivante s'est imposée en informatique :
  - Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



P = problèmes avec un algorithme polynomial en temps.

- Exemples :
  - BON COLORIAGE est dans P.
  - on ne sait pas si 3-COLORABILITE est dans P.

Plus précisément

Complexité en temps
- Objectif du cours
- Deux exemples
- Une convention
- Pourquoi cette convention ?

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

- Thèse de Church :
  - Les modèles suivants se simulent deux à deux :
    - Les machines de Turing à un ruban.
    - Les machines de Turing à deux rubans.
    - Les machines à $k \geq 2$ piles
    - Les machines RAM
    - Les machines à $k \geq 2$ compteurs
    - Les programmes JAVA, C, CAML, ...

1. dont les registres restent bornés.
2. en définissant proprement les instructions autorisées.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

- Thèse effective de Church :
  - Les modèles suivants se simulent deux à deux :
    - Les machines de Turing à un ruban.
    - Les machines de Turing à deux rubans.
    - Les machines à $k \geq 2$ piles
    - Les machines RAM [1]
    - ~~Les machines à $k \geq 2$ compteurs~~
    - Les programmes [2] JAVA, C, CAML, ...
  - de telle sorte que : t instructions de l'un sont simulées par un nombre d'instructions polynomial en t par l'autre.

1. dont les registres restent bornés.
2. en définissant proprement les instructions autorisées.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : T

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : T^k

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^k)^{k'} = T^{kk'}$

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sans avoir à préciser dans quel langage / avec quel modèle l'algorithme est implémenté.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

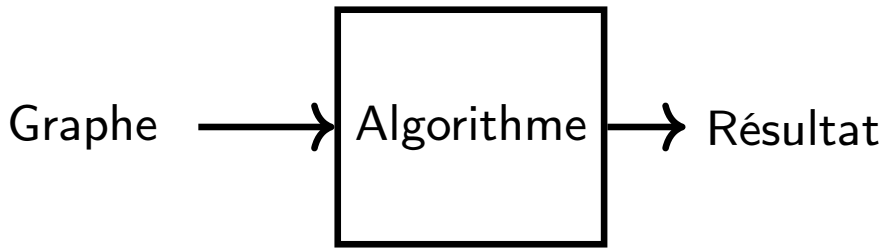
- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sans avoir à préciser dans quel langage / avec quel modèle l'algorithme est implémenté.
- Le temps correspond (à la composition par un polynôme près) au nombre d'instructions dans chacun de ces modèles.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

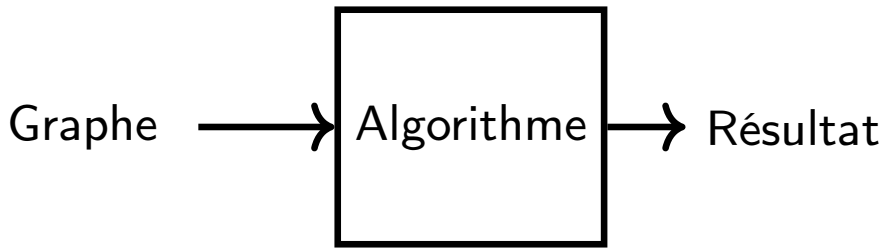
- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sans avoir à préciser dans quel langage / avec quel modèle l'algorithme est implémenté.
- Le temps correspond (à la composition par un polynôme près) au nombre d'instructions dans chacun de ces modèles.
  - on peut donc par exemple mesurer le temps comme le nombre d'étapes sur les machines de Turing.

Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

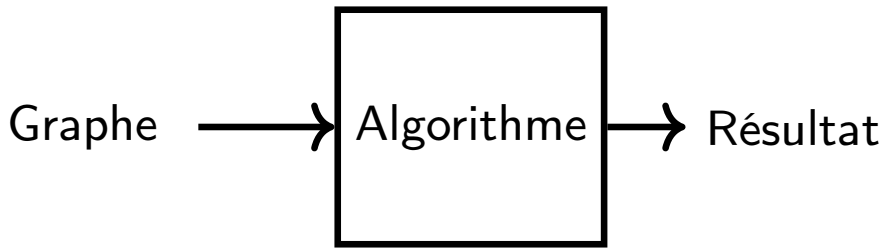
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .

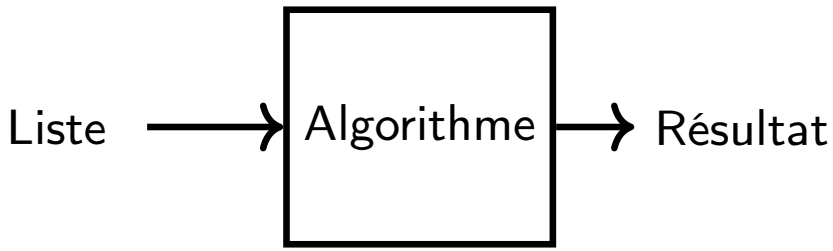
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**

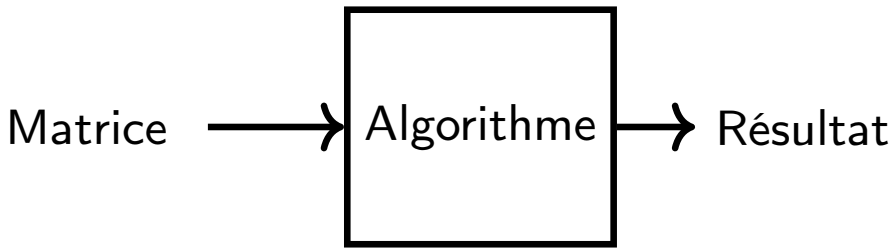
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**

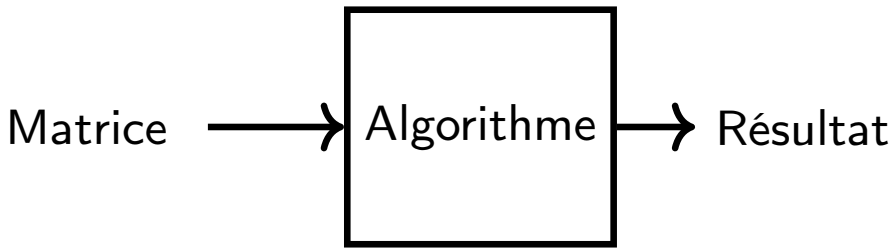
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**

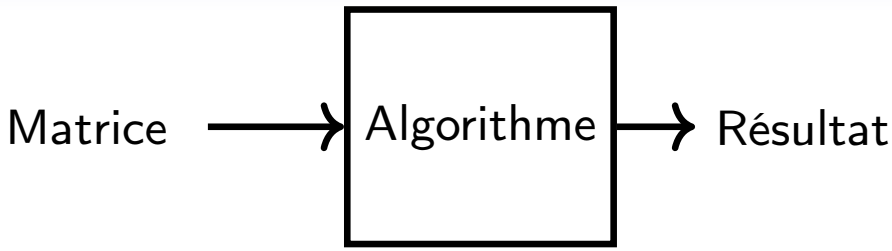
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.

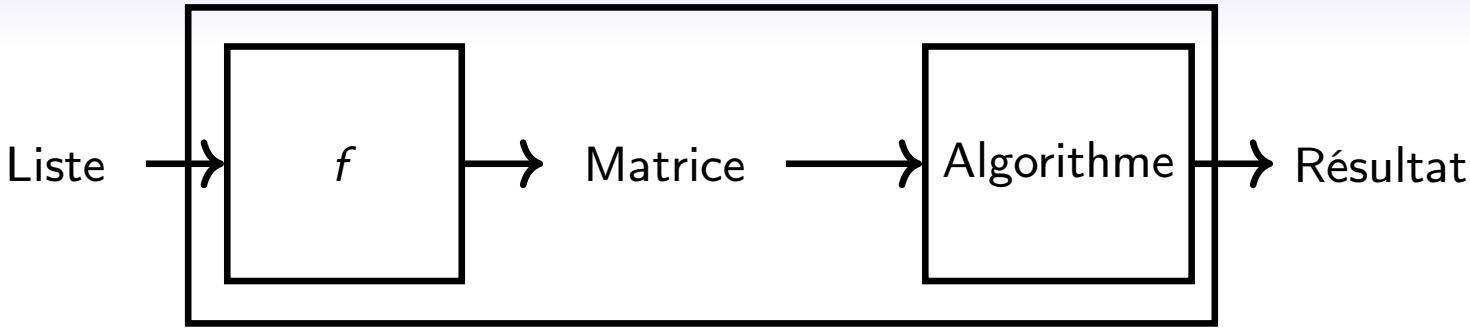
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

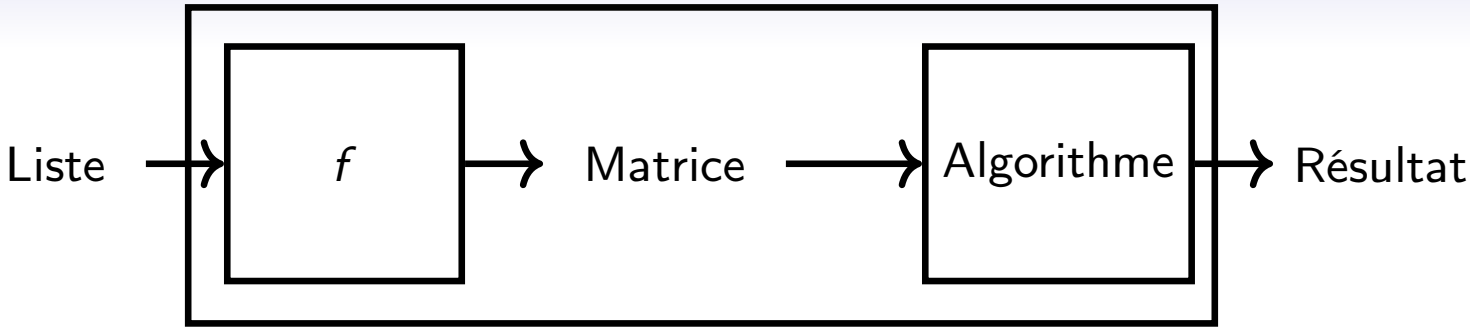
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T_f(taille(Liste)) + T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

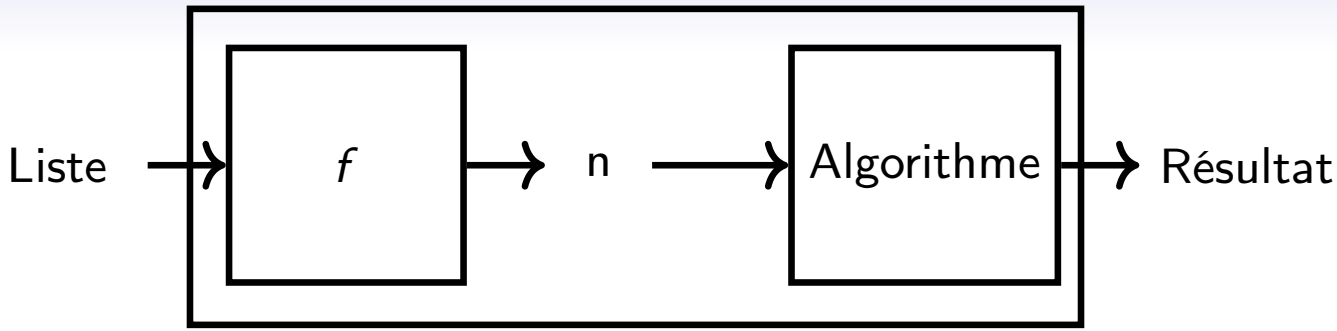
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T_f(taille(Liste)) + T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

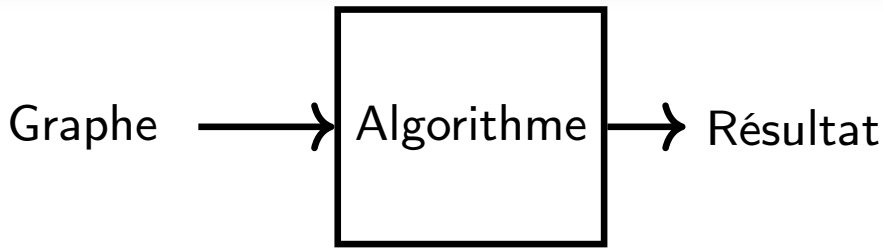
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T(n^k)$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Remarque : le nombre de sommets est polynomial en la taille d'une liste d'adjacence ou d'une matrice d'adjacence

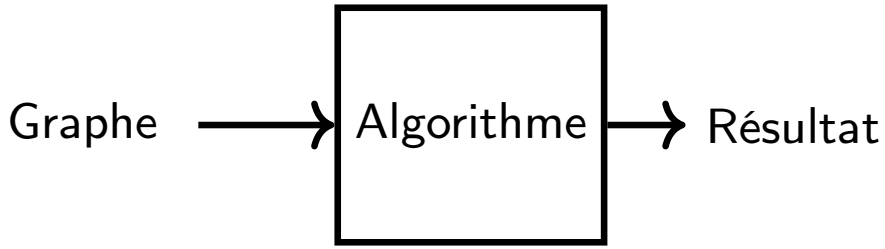
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : Polynomial/Non polynomial

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe
    - peut se représenter par une **matrice d'adjacence.**
    - peut se représenter par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Remarque : le nombre de sommets est polynomial en la taille d'une liste d'adjacence ou d'une matrice d'adjacence
- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sur ces objets sans avoir à rentrer dans les détails de comment on écrit ces objets.

Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : Polynomial/Non polynomial

- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sur ces objets sans avoir à rentrer dans les détails de comment on écrit ces objets.

Au menu

Complexité en temps

La classe P

La classe NP

NP-complétude

Quelques autres problèmes NP-complets célèbres

Plus précisément

La classe P
- Définition
- Exemples
- La notion de réduction

La classe P

- Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.
- On note TIME(t(n)) pour la classe des problèmes (langages) décidés par une machine de Turing en temps $\mathcal{O}(t(n))$, où n est la taille de l'entrée.
- La classe P est la classe des problèmes (langages) définie par :

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(\mathrm{n}^{\mathrm{k}}).$$

  - P caractérise les algorithmes raisonnables avec la convention précédente.

La classe P

- Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

- On note TIME(t(n)) pour la classe des problèmes (langages) décidés par une machine de Turing en temps $\mathcal{O}(t(n))$, où n est la taille de l'entrée.
  - Si on préfère, $L \in$ TIME(t(n)) s'il y a une machine de Turing M telle que
    - M décide L :
    - En un temps en $\mathcal{O}(t(n))$, où $n = |w|$ est la longueur de w :

- La classe P est la classe des problèmes (langages) définie par :

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(\mathrm{n}^{\mathrm{k}}).$$

  - P caractérise les algorithmes raisonnables avec la convention précédente.

La classe P

- Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

- On note TIME(t(n)) pour la classe des problèmes (langages) décidés par une machine de Turing en temps $\mathcal{O}(t(n))$, où n est la taille de l'entrée.
  - Si on préfère, $L \in$ TIME(t(n)) s'il y a une machine de Turing M telle que
    - M décide L : pour tout mot w, M accepte w si et seulement si $w \in L$, et M refuse w si et seulement si $w \notin L$;
    - En un temps en $\mathcal{O}(t(n))$, où $n = |w|$ est la longueur de w :

- La classe P est la classe des problèmes (langages) définie par :

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(\mathrm{n}^{\mathrm{k}}).$$

  - P caractérise les algorithmes raisonnables avec la convention précédente.

La classe P

- Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.

- On note TIME(t(n)) pour la classe des problèmes (langages) décidés par une machine de Turing en temps $\mathcal{O}(t(n))$, où n est la taille de l'entrée.
  - Si on préfère, $L \in$ TIME(t(n)) s'il y a une machine de Turing M telle que
    - M décide L : pour tout mot w, M accepte w si et seulement si $w \in L$, et M refuse w si et seulement si $w \notin L$;
    - En un temps en $\mathcal{O}(t(n))$, où $n = |w|$ est la longueur de w : il y a des entiers n_0 et c tels que pour tout mot w, M accepte ou refuse en utilisant au plus $c \times t(n)$ étapes, où $n = |w|$, dès que $|w| \geq n_0$.
- La classe P est la classe des problèmes (langages) définie par :

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(\mathrm{n}^{\mathrm{k}}).$$

  - P caractérise les algorithmes raisonnables avec la convention précédente.

Plus précisément

La classe P

- Définition
- Exemples
- La notion de réduction

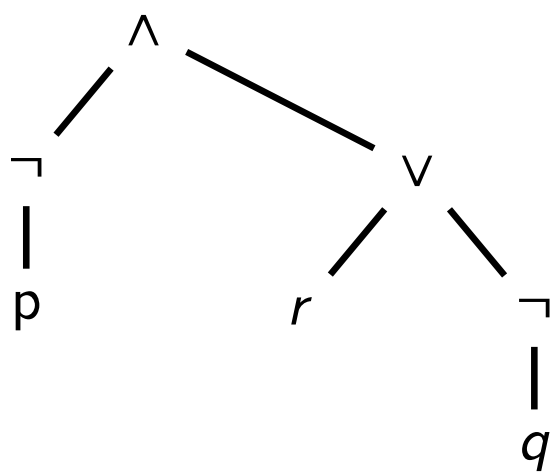
Exemples de problèmes de P

- BON COLORIAGE $\in$ P.

- Évaluation en calcul propositionnel $\in$ P.

Donnée: Une formule $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive, des valeurs $x_1, \cdots, x_n \in \{0, 1\}$ pour chacune des variables de la formule.

Réponse: Décider si la formule F s'évalue à vrai pour ces valeurs des variables.



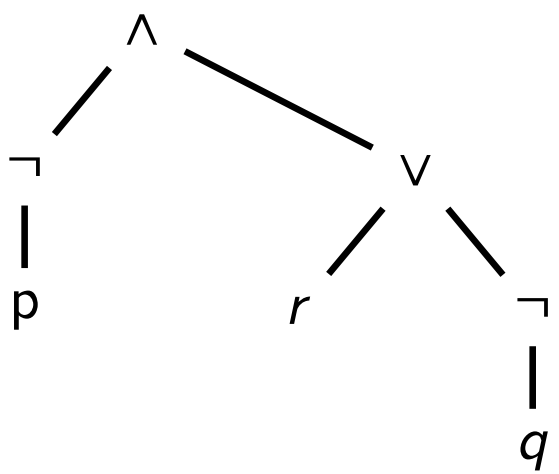
$p = 0, r = 1, q = 0.$

Dans P ?

- 3-COLORABILITE
- SAT :

Donnée: Une formule $F = (x_1, \cdots, x_n)$ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive.

Réponse: Décider si F est satisfiable : c'est-à-dire décider s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \{0, 1\}$ tel que F s'évalue à vrai pour cette valeur de ses variables $x_1, \cdots, x_n$.

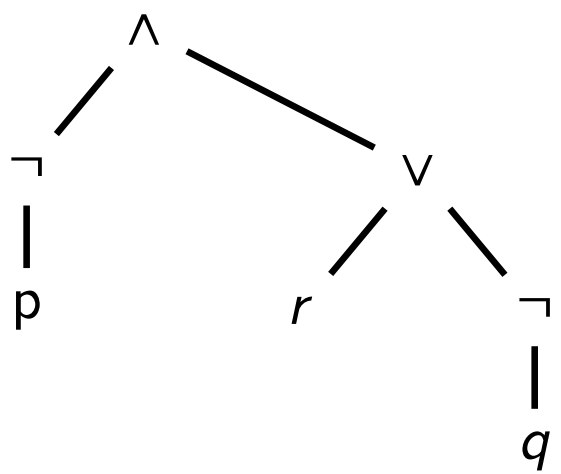


Dans P ?

- 3-COLORABILITE
- SAT :

Donnée: Une formule $F = (x_1, \cdots, x_n)$ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive.

Réponse: Décider si F est satisfiable : c'est-à-dire décider s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \{0, 1\}$ tel que F s'évalue à vrai pour cette valeur de ses variables $x_1, \cdots, x_n$.



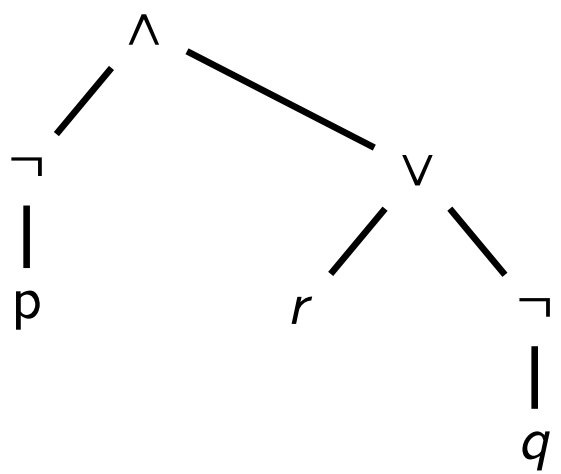
- Pour les deux problèmes, on ne sait pas s'ils sont dans P.

Dans P ?

- 3-COLORABILITE
- SAT :

Donnée: Une formule $F = (x_1, \cdots, x_n)$ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive.

Réponse: Décider si F est satisfiable : c'est-à-dire décider s'il existe $x_1, \cdots, x_n \in \{0, 1\}$ tel que F s'évalue à vrai pour cette valeur de ses variables $x_1, \cdots, x_n$.



- Pour les deux problèmes, on ne sait pas s'ils sont dans P.
- Lequel de ces problèmes est le plus difficile ?

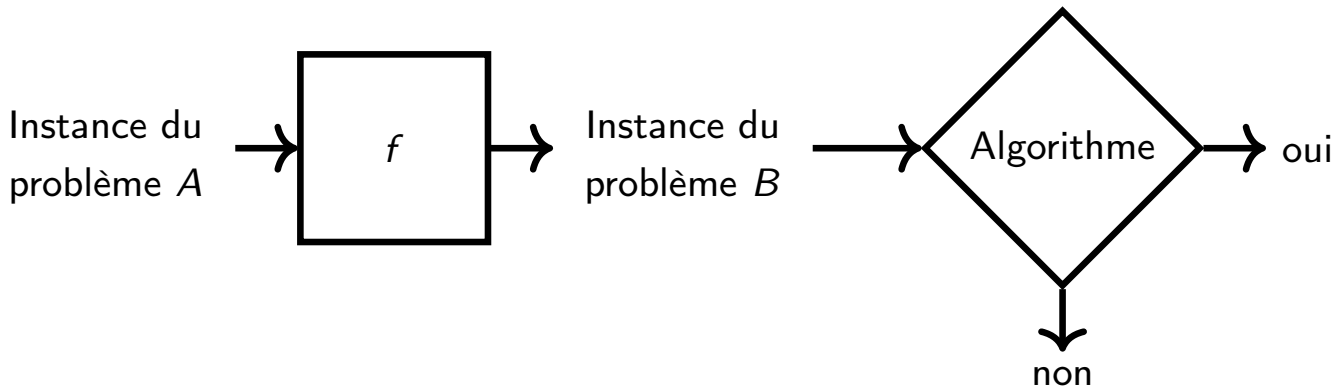
Plus précisément

La classe P

- Définition
- Exemples
- La notion de réduction

Comment comparer les problèmes

- Idée de $\leq_M$:

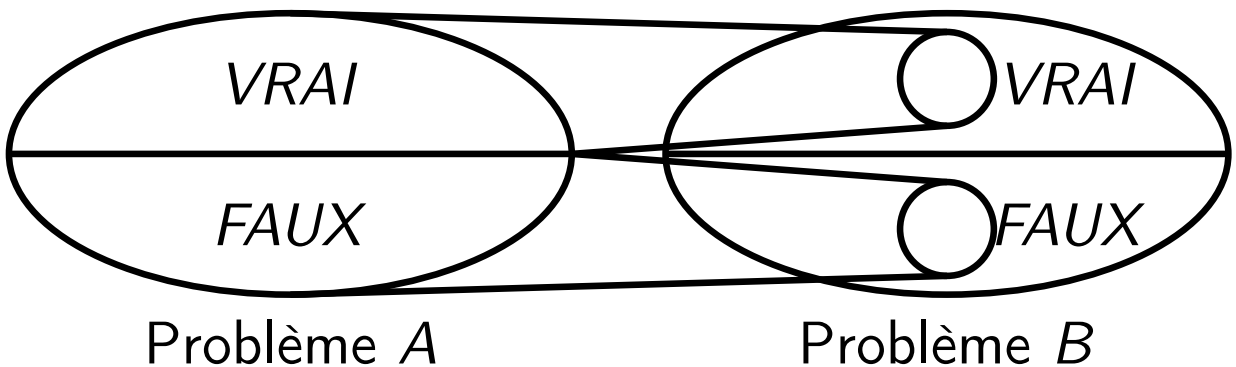


- On va utiliser exactement la même idée, mais en remplaçant **calculable** par **calculable en temps polynomial**,
  - pour obtenir $\leq$.

La notion de réduction

- Soient A et B deux problèmes d'alphabets respectifs M_A et M_B. Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : M_A^* \to M_B^*$ calculable **en temps polynomial** telle que

$$w \in A \text{ ssi } f(w) \in B.$$

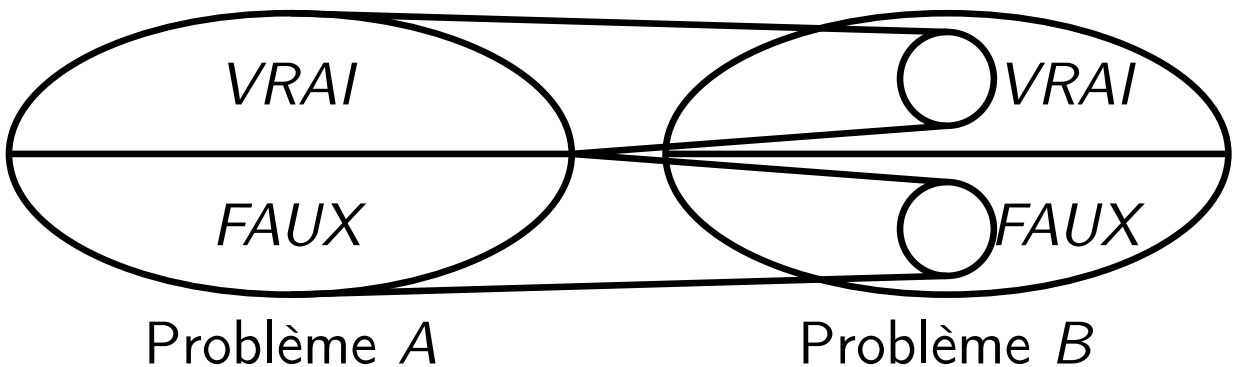


- On note $A \leq B$ lorsque A se réduit à B.

La notion de réduction

- Soient A et B deux problèmes d'alphabets respectifs M_A et M_B. Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : M_A^* \to M_B^*$ calculable **en temps polynomial** telle que

$$w \in A \text{ ssi } f(w) \in B.$$



- On note $A \leq B$ lorsque A se réduit à B.
  - intuitivement : $A \leq B$ signifie que A est plus facile que B.

Principales propriétés

Théorème

$\leq$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. $L \leq L$;
2. $L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$ *impliquent* $L_1 \leq L_3$.

Théorème

Si $A \leq B$, et si B est dans P *alors A est dans* P

Théorème

Si $A \leq B$, et si A n'est pas dans P, *alors B n'est pas dans* P.

Principales propriétés

Théorème

$\leq$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq L$;*
2. *$L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$ impliquent $L_1 \leq L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq B$, et si B est dans P *alors A est dans* P

Théorème

Si $A \leq B$, et si A n'est pas dans P*, alors B n'est pas dans* P*.*

Principales propriétés

Théorème

$\leq$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq L$;*
2. *$L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$ impliquent $L_1 \leq L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq B$, et si B est dans P *alors A est dans* P

- intuitivement : si un problème est plus facile qu'un problème P, alors il est dans P.

Théorème

Si $A \leq B$, et si A n'est pas dans P*, alors B n'est pas dans* P*.*

Principales propriétés

Théorème

$\leq$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq L$;*
2. *$L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$ impliquent $L_1 \leq L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq B$, et si B est dans P *alors A est dans* P

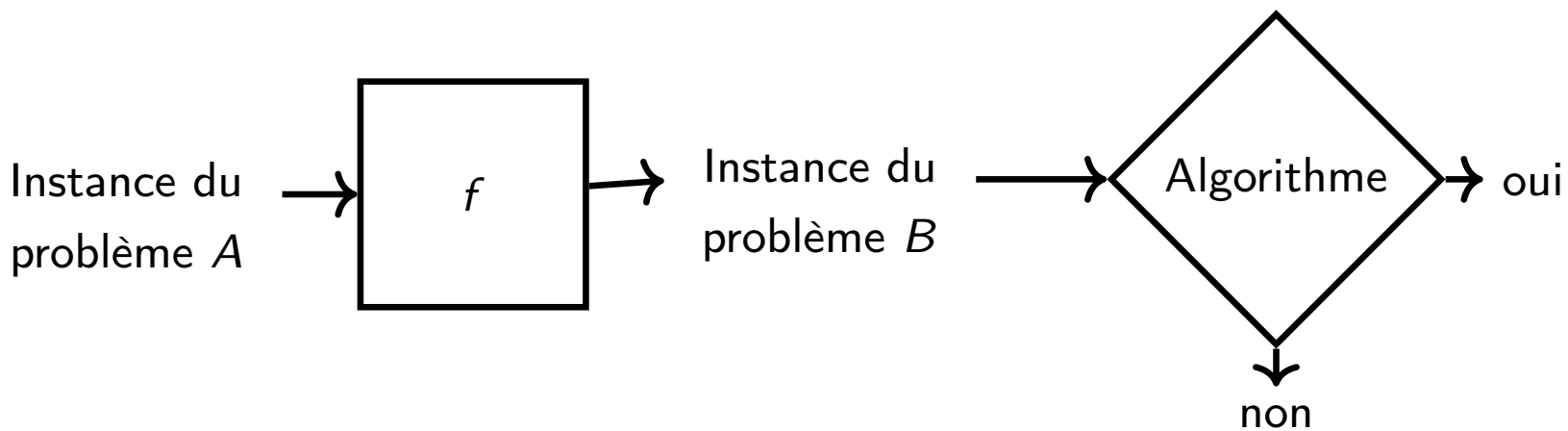
- intuitivement : si un problème est plus facile qu'un problème P, alors il est dans P.

Théorème

Si $A \leq B$, et si A n'est pas dans P*, alors B n'est pas dans* P*.*

- intuitivement : si un problème est plus difficile qu'un problème qui n'est pas P, alors il n'est pas dans P.

- Preuve du premier théorème :
  - Considérer la fonction identité pour f pour le premier point. Pour le second point, supposons $L_1 \leq L_2$ via la réduction f, et $L_2 \leq L_3$ via la réduction g. On a $x \in L_1$ ssi $g(f(x)) \in L_2$. La composée de deux fonctions calculables **en temps polynomial** est calculable.
- Preuve du second théorème :
  - A est décidé par la machine de Turing qui, sur une entrée w, calcule $f(w)$, puis simule la machine de Turing qui décide B sur l'entrée $f(w)$. Puisqu'on a $w \in A$ si et seulement si $f(w) \in B$, l'algorithme est correct. Il fonctionne **en temps polynomial avec les hypothèses**.



- Le troisième théorème est la contraposée du second.

Lequel est le plus difficile ?

- 3-COLORABILITE $\leq$ SAT :

- SAT $\leq$ 3-COLORABILITE ? :

Lequel est le plus difficile ?

- 3-COLORABILITE $\leq$ SAT :
  - voir transparent 27 du cours 2.
- SAT $\leq$ 3-COLORABILITE ? :

Lequel est le plus difficile ?

- 3-COLORABILITE $\leq$ SAT :
  - voir transparent 27 du cours 2.
  - Théorème de Cook-Levin, à venir.
- SAT $\leq$ 3-COLORABILITE ? :

Lequel est le plus difficile ?

- 3-COLORABILITE $\leq$ SAT :
  - voir transparent 27 du cours 2.
  - Théorème de Cook-Levin, à venir.
- SAT $\leq$ 3-COLORABILITE ? :
  - voir transparent 35

Le transparent 27 du cours 2 :

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et k couleurs.
- On considère $\mathscr{P} = \{A_{u,i}, u \in V, 1 \leq i \leq k\}$ un ensemble de variables propositionnelles.
- Idée : $A_{u,i}$ vraie ssi le sommet u est colorié avec la couleur i.
- Contraintes :
  - Chaque sommet possède une couleur :
    $$\Gamma_1 = \{A_{u,1} \vee \cdots \vee A_{u,k} | u \in V\}.$$
  - Chaque sommet n'a pas plus qu'une couleur :
    $$\Gamma_2 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{u,j}) | u \in V, 1 \leq i,j \leq k, i \neq j\}.$$
  - Chaque arête n'a pas ses extrémités d'une même couleur :
    $$\Gamma_3 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{v,i}) | u \in V, 1 \leq i \leq k, (u,v) \in E\}.$$
- Un graphe est coloriable avec k couleurs si et seulement si on peut satisfaire toutes les formules de $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Au menu

Complexité en temps

La classe P

La classe NP

NP-complétude

Quelques autres problèmes NP-complets célèbres

Plus précisément

- On ne sait pas si 3-COLORABILITE et SAT admettent ou pas un algorithme polynomial.
  - Cependant, il est très clair que 3-COLORABILITE et SAT admettent un **vérificateur polynomial**.

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

  - Autre façon de l'écrire :

$$w \in A \text{ ssi } \exists u,\ V \text{ accepte } (w, u).$$

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

  - Autre façon de l'écrire :

$$w \in A \text{ ssi } \exists u,\ V \text{ accepte } (w, u).$$

  - Autrement dit, un vérificateur utilise une information en plus, à savoir u pour vérifier que w est dans A.

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

  - Autre façon de l'écrire :

$$w \in A \text{ ssi } \exists u,\ V \text{ accepte } (w, u).$$

  - Autrement dit, un vérificateur utilise une information en plus, à savoir u pour vérifier que w est dans A.
    - Le mot u est alors appelé un **certificat** (parfois aussi une **preuve**) pour w.

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

  - Autre façon de l'écrire :

$$w \in A \text{ ssi } \exists u,\ V \text{ accepte } (w, u).$$

  - Autrement dit, un vérificateur utilise une information en plus, à savoir u pour vérifier que w est dans A.
    - Le mot u est alors appelé un **certificat** (parfois aussi une **preuve**) pour w.

- Le vérificateur est polynomial si V décide en temps polynomial en la **longueur de** w.

Vérificateur

- Un **vérificateur** pour un problème A est un algorithme V tel que A s'écrit

$$A = \{w | V \text{ accepte } (w, u) \text{ pour un certain mot } u\}.$$

  - Autre façon de l'écrire :

$$w \in A \text{ ssi } \exists u,\ V \text{ accepte } (w, u).$$

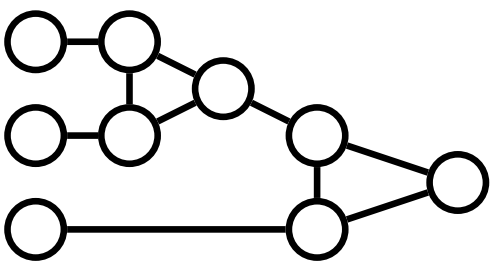
  - Autrement dit, un vérificateur utilise une information en plus, à savoir u pour vérifier que w est dans A.
    - Le mot u est alors appelé un **certificat** (parfois aussi une **preuve**) pour w.

- Le vérificateur est polynomial si V décide en temps polynomial en la **longueur de** w.

- On dit qu'un langage est **polynomialement vérifiable** s'il admet un vérificateur polynomial.

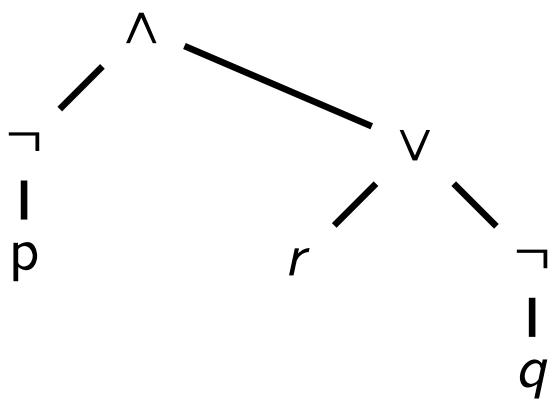
Plus précisément

Exemple 1 : 3-COLORABILITE



- Certificat u :
  - $u = c_1 c_2 \cdots c_n$ donne les couleurs de chacun des sommets.
- Vérificateur :
  - l'algorithme pour BON COLORIAGE.
- $G \in$ 3-COLORABILITE ssi $\exists u$, $(G, u) \in$ BON COLORIAGE.
- Vérifier que u est un coloriage de G se fait bien en un temps polynomial en la taille de G.

Exemple 2 : SAT



- Certificat u :
  - $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \{0,1\}^n$ donne la liste de valeurs de chaque variable.
- Vérificateur :
  - l'algorithme V pour évaluer une formule en calcul propositionnel à partir d'une formule F et de la valeur de ses variables.
- $F \in \mathrm{SAT}$ ssi $\exists u,\ (F,u) \in V$.
- Vérifier que u rend la formule F vraie se fait bien en un temps polynomial en la taille de F.

Plus précisément

La classe NP

- NP est la classe des problèmes (langages) qui possèdent un vérificateur polynomial.

La classe NP

- NP est la classe des problèmes (langages) qui possèdent un vérificateur polynomial.
  - NP contient un nombre incroyable de problèmes d'intérêt pratique.

La classe NP

- NP est la classe des problèmes (langages) qui possèdent un vérificateur polynomial.
  - NP contient un nombre incroyable de problèmes d'intérêt pratique.
  - Parenthèse/Attention : le N dans NP ne vient pas de "non", "not", mais de "non-déterministe".

La classe NP

- NP est la classe des problèmes (langages) qui possèdent un vérificateur polynomial.
  - NP contient un nombre incroyable de problèmes d'intérêt pratique.
  - Parenthèse/Attention : le *N* dans NP ne vient pas de "non", "not", mais de "non-déterministe".
    - On peut montrer que NP correspond aux problèmes décidés en temps polynomial par une machine de Turing non-déterministe.

La classe NP

- NP est la classe des problèmes (langages) qui possèdent un vérificateur polynomial.
  - NP contient un nombre incroyable de problèmes d'intérêt pratique.
  - Parenthèse/Attention : le *N* dans NP ne vient pas de "non", "not", mais de "non-déterministe".
    - On peut montrer que NP correspond aux problèmes décidés en temps polynomial par une machine de Turing non-déterministe.
  - Par définition $P \subset NP$.

Plus précisément

La classe NP

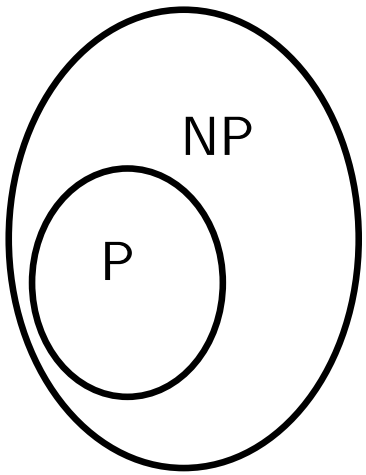
- La notion de vérificateur
- Exemples
- La classe NP
- La question P = NP ?

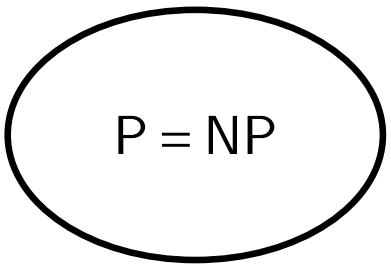
La question $P = NP$?

- La question de savoir si l'inclusion est stricte est la question ouverte la plus connue et la plus célèbre de l'informatique.

La question P = NP ?

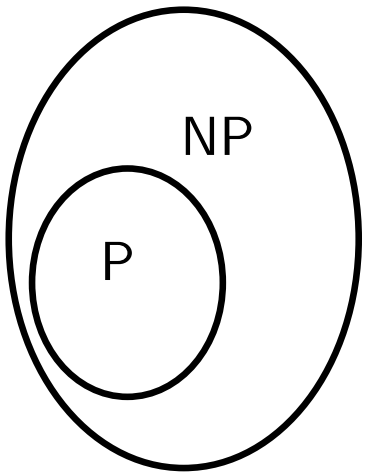
- La question de savoir si l'inclusion est stricte est la question ouverte la plus connue et la plus célèbre de l'informatique.
  - Une des deux possibilités est correcte : mais laquelle ?

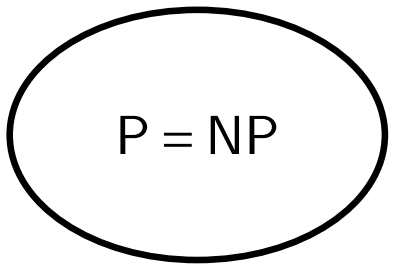




La question P = NP ?

- La question de savoir si l'inclusion est stricte est la question ouverte la plus connue et la plus célèbre de l'informatique.
  - Une des deux possibilités est correcte : mais laquelle ?

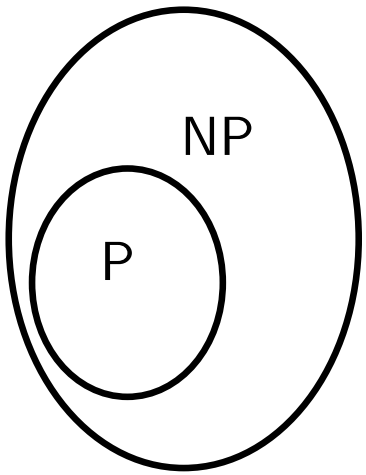


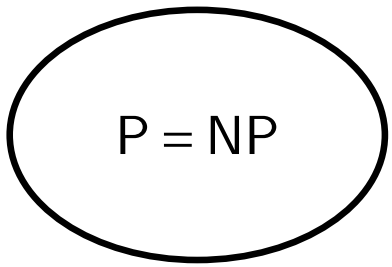


  - Placée parmi la liste des questions les plus importantes pour les mathématiques et l'informatique pour le millénaire en 2000.

La question P = NP ?

- La question de savoir si l'inclusion est stricte est la question ouverte la plus connue et la plus célèbre de l'informatique.
  - Une des deux possibilités est correcte : mais laquelle ?

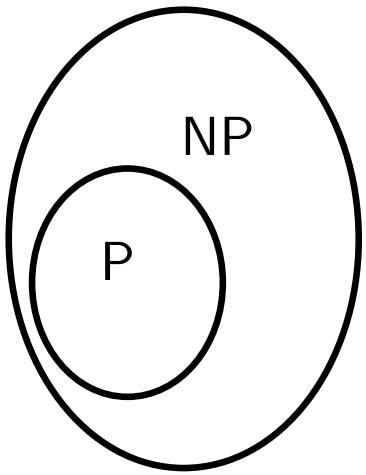


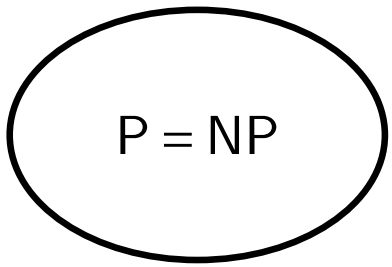


  - Placée parmi la liste des questions les plus importantes pour les mathématiques et l'informatique pour le millénaire en 2000.
  - Le Clay Mathematics Institute offre 1000000 de dollars à qui déterminerait la réponse à cette question.

La question P = NP ?

- La question de savoir si l'inclusion est stricte est la question ouverte la plus connue et la plus célèbre de l'informatique.
  - Une des deux possibilités est correcte : mais laquelle ?





  - Placée parmi la liste des questions les plus importantes pour les mathématiques et l'informatique pour le millénaire en 2000.
  - Le Clay Mathematics Institute offre 1000000 de dollars à qui déterminerait la réponse à cette question.
  - Cette question théorique a des implications très concrètes : par exemple pour la sûreté de nombreuses procédures cryptographiques.
  - On conjecture généralement que l'inclusion est stricte.

Au menu

Complexité en temps

La classe P

La classe NP

NP-complétude

Quelques autres problèmes NP-complets célèbres

Plus précisément

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.

- Un problème A est dit NP-difficile si tout problème B de NP est tel que $B \leq A$.

  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.

- Un problème A est dit NP-difficile si tout problème B de NP est tel que $B \leq A$.

  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.

- Un problème A est dit NP-complet si en plus on a $A \in \mathrm{NP}$.

  - Autrement dit : A est NP-complet signifie que A est un élément maximum dans NP pour $\leq$.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.
  - ou plus généralement dans une classe $\mathscr{C}$ de problèmes de décision.
- Un problème A est dit NP-difficile si tout problème B de NP est tel que $B \leq A$.
  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.
- Un problème A est dit NP-complet si en plus on a $A \in \mathrm{NP}$.
  - Autrement dit : A est NP-complet signifie que A est un élément maximum dans NP pour $\leq$.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.
  - ou plus généralement dans une classe $\mathscr{C}$ de problèmes de décision.

- Un problème A est dit NP-difficile si tout problème B de NP est tel que $B \leq A$.

  - plus généralement : Un problème A est dit $\mathscr{C}$-difficile si tout problème B de $\mathscr{C}$ est tel que $B \leq A$.
  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.

- Un problème A est dit NP-complet si en plus on a $A \in \text{NP}$.

  - Autrement dit : A est NP-complet signifie que A est un élément maximum dans NP pour $\leq$.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.
  - ou plus généralement dans une classe $\mathscr{C}$ de problèmes de décision.

- Un problème A est dit NP-difficile si tout problème B de NP est tel que $B \leq A$.

  - plus généralement : Un problème A est dit $\mathscr{C}$-difficile si tout problème B de $\mathscr{C}$ est tel que $B \leq A$.
  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.

- Un problème A est dit NP-complet si en plus on a $A \in \text{NP}$.

  - plus généralement : Un problème A est dit $\mathscr{C}$-complet si en plus on a $A \in \mathscr{C}$.
  - Autrement dit : A est NP-complet signifie que A est un élément maximum dans NP pour $\leq$.

Plus précisément

Théorème (Cook-Levin)

- *Le problème* SAT *est* NP*-complet.*

Théorème (Cook-Levin)

- *Le problème* SAT *est* NP*-complet.*

(on verra la preuve plus tard)

Conséquences

Corollaire

$\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ *si et seulement si* $\mathsf{SAT} \in \mathsf{P}$.

Conséquences

Corollaire

$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ *si et seulement si* $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

- Preuve :
  - Puisque SAT est dans NP, si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, alors $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.
  - Réciproquement, puisque SAT est complet, pour tout problème $B \in \mathrm{NP}$, $B \leq \mathrm{SAT}$ et donc $B \in \mathrm{P}$ si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

Conséquences

Corollaire

$P = NP$ *si et seulement si* $SAT \in P$.

- Preuve :
  - Puisque SAT est dans NP, si $P = NP$, alors $SAT \in P$.
  - Réciproquement, puisque SAT est complet, pour tout problème $B \in NP$, $B \leq SAT$ et donc $B \in P$ si $SAT \in P$.
- Se généralise à n'importe problème NP-complet :
  - Soit A un problème NP-complet.
    $P = NP$ si et seulement si $A \in P$.

Conséquences

Corollaire

$P = NP$ *si et seulement si* $SAT \in P$.

- Preuve :
  - Puisque SAT est dans NP, si $P = NP$, alors $SAT \in P$.
  - Réciproquement, puisque SAT est complet, pour tout problème $B \in NP$, $B \leq SAT$ et donc $B \in P$ si $SAT \in P$.
- Se généralise à n'importe problème NP-complet :
  - Soit A un problème NP-complet.
    $P = NP$ si et seulement si $A \in P$.
  - D'où l'intérêt de produire de nombreux problèmes NP-complets.

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $P = NP \ldots$

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $P = NP$...
  - Remarque : Si un problème A et un problème B sont NP-complets alors $A \leq B$ et $B \leq A$:
    - Tous les problèmes NP-complets sont donc de même difficulté.

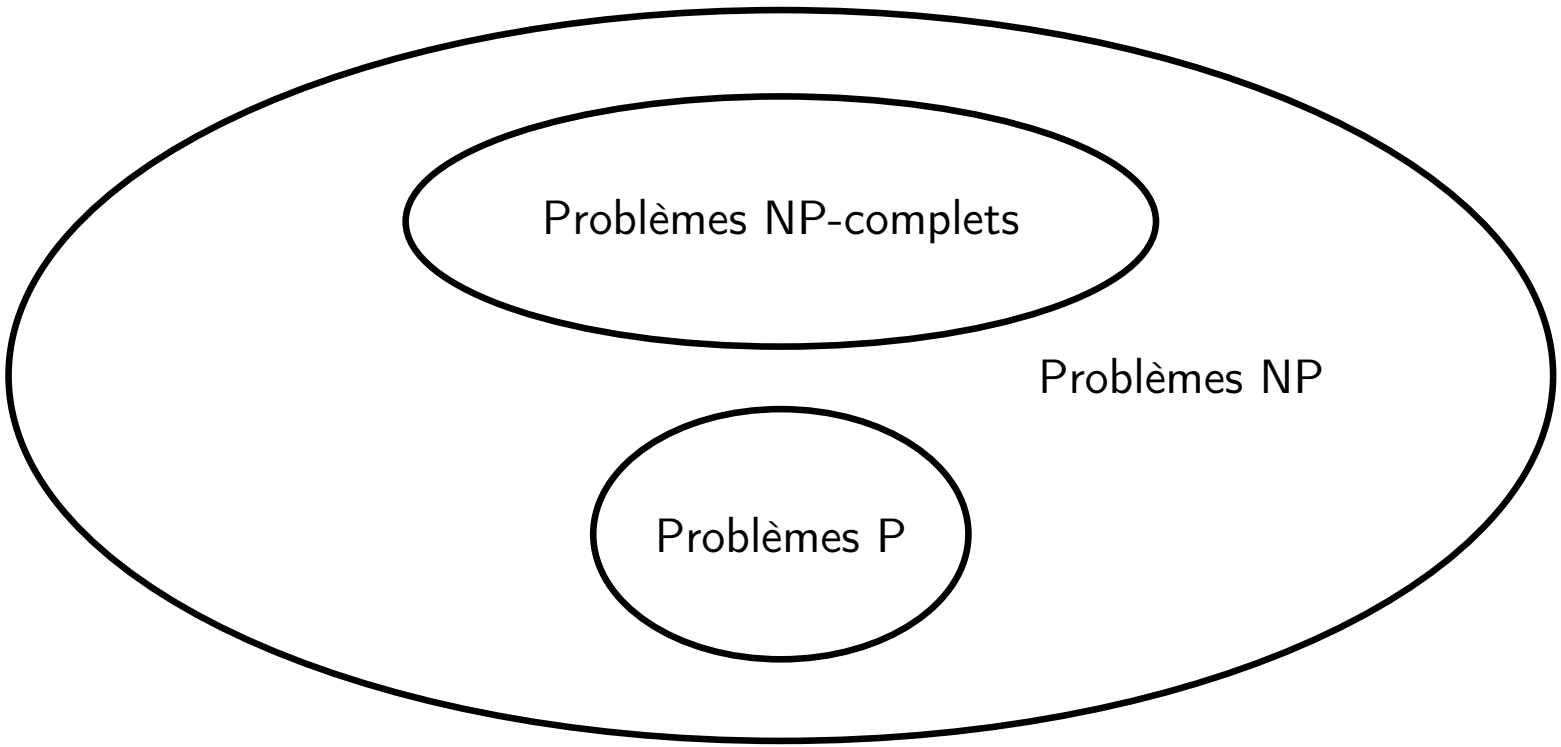
A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $P = NP$...
  - Remarque : Si un problème A et un problème B sont NP-complets alors $A \leq B$ et $B \leq A$:
    - Tous les problèmes NP-complets sont donc de même difficulté.
- Surtout :
  - Supposons que l'on n'arrive pas à trouver un algorithme polynomial pour un problème.
  - Prouver sa NP-complétude permet de se convaincre que cela n'est pas possible,
    - sauf si $P = NP$.

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $P = NP$...
  - Remarque : Si un problème A et un problème B sont NP-complets alors $A \leq B$ et $B \leq A$:
    - Tous les problèmes NP-complets sont donc de même difficulté.
- Surtout :
  - Supposons que l'on n'arrive pas à trouver un algorithme polynomial pour un problème.
  - Prouver sa NP-complétude permet de se convaincre que cela n'est pas possible,
    - sauf si $P = NP$.
  - et qu'il faut donc chercher une autre approche (voir cours à venir, exemple : approximations).

Situation avec l'hypothèse $P \neq NP$.



Plus précisément

Stratégie pour prouver la NP-complétude

- Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :
  1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
  2. et de prouver que $B \leq A$ pour un problème B que l'on sait déjà NP-complet.

Stratégie pour prouver la NP-complétude

- Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :
  1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
  2. et de prouver que $B \leq A$ pour un problème B que l'on sait déjà NP-complet.

- Pourquoi ?
  - En effet, le point 1. permet de garantir que $A \in \mathrm{NP}$,

Stratégie pour prouver la NP-complétude

- Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :
  1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
  2. et de prouver que $B \leq A$ pour un problème B que l'on sait déjà NP-complet.

- Pourquoi ?
  - En effet, le point 1. permet de garantir que $A \in \mathrm{NP}$,
  - et le point 2. que pour tout problème $C \in \mathrm{NP}$ on a $C \leq A$:
    - en effet, par la NP-complétude de B on a $C \leq B$, et puisque $B \leq A$, on obtient $C \leq A$.

Stratégie pour prouver la NP-complétude

- Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :
  1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
  2. et de prouver que $B \leq A$ pour un problème B que l'on sait déjà NP-complet.

- Pourquoi ?
  - En effet, le point 1. permet de garantir que $A \in \mathrm{NP}$,
  - et le point 2. que pour tout problème $C \in \mathrm{NP}$ on a $C \leq A$:
    - en effet, par la NP-complétude de B on a $C \leq B$, et puisque $B \leq A$, on obtient $C \leq A$.

- **Attention, la NP-complétude d'un problème A s'obtient en prouvant qu'il est plus difficile qu'un autre problème NP-complet, et pas le contraire.**
  - C'est une erreur fréquente dans les raisonnements.

Une autre raison pour prouver la NP-complétude de différents problèmes

- Cette stratégie nécessite de posséder une base la plus large possible de problèmes connus pour être NP-complets.
  - Plus de 300 répertoriés en 1979 dans le livre de Garey & Johnson.

Plus précisément

3-SAT est NP-complet

Problème 3-SAT:

Donnée: Une formule F sous la forme d'une conjonction de disjonction de 3 littéraux (variables ou leur négation).

Réponse: Décider si F est satisfiable.

Theorem

Le problème 3-SAT *est* NP-*complet.*

- On appelle souvent théorème de Cook-Levin ce théorème, plus facile à utiliser que l'autre.

3-SAT est NP-complet

Problème 3-SAT:

Donnée: Une formule F sous la forme d'une conjonction de disjonction de 3 littéraux (variables ou leur négation).

- Formellement : une formule

$$F = C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_\ell$$

avec

$$C_i = y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee y_{i,3},$$

où pour tout i, j,

$y_{i,j}$ est soit x_k, soit $\neg x_k$ pour l'un des x_k,

pour des variables $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

Réponse: Décider si F est satisfiable.

Theorem

Le problème 3-SAT *est* NP*-complet.*

- On appelle souvent théorème de Cook-Levin ce théorème, plus facile à utiliser que l'autre.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.

- SAT $\leq$ 3-SAT :

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.
  - Soit C une clause de F, par exemple $C = x \vee y \vee \neg z \vee u \vee \neg v \vee w \vee t$.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.
  - Soit C une clause de F, par exemple $C = x \vee y \vee \neg z \vee u \vee \neg v \vee w \vee t$.
    - On introduit de nouvelles variables a, b, c, d associées à cette clause, et on remplace C par la formule $R(C) = (x \vee y \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg z \vee b) \wedge (\neg b \vee u \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg v \vee d) \wedge (\neg d \vee w \vee t)$.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.
  - Soit C une clause de F, par exemple $C = x \vee y \vee \neg z \vee u \vee \neg v \vee w \vee t$.
    - On introduit de nouvelles variables a, b, c, d associées à cette clause, et on remplace C par la formule $R(C) = (x \vee y \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg z \vee b) \wedge (\neg b \vee u \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg v \vee d) \wedge (\neg d \vee w \vee t)$.
    - Il est facile de vérifier qu'une assignation de x, y, z, u, v, w, t peut être complétée par une assignation de a, b, c, d de façon à rendre cette formule vraie si et seulement si C est vraie.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.
  - Soit C une clause de F, par exemple $C = x \vee y \vee \neg z \vee u \vee \neg v \vee w \vee t$.
    - On introduit de nouvelles variables a, b, c, d associées à cette clause, et on remplace C par la formule $R(C) = (x \vee y \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg z \vee b) \wedge (\neg b \vee u \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg v \vee d) \wedge (\neg d \vee w \vee t)$.
    - Il est facile de vérifier qu'une assignation de x, y, z, u, v, w, t peut être complétée par une assignation de a, b, c, d de façon à rendre cette formule vraie si et seulement si C est vraie.
  - A partir de $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots C_\ell$, on construit

$$F' = R(C_1) \wedge R(C_2) \wedge \cdots \wedge R(C_\ell).$$

  - On a $F \in SAT$ ssi $F' \in$ 3-SAT.

Preuve

- 3-SAT est dans NP.
  - La donnée d'une valeur dans $\{0,1\}$ pour chaque variable constitue un certificat vérifiable en temps polynomial.
- SAT $\leq$ 3-SAT :
  - Soit F une formule SAT.
  - Soit C une clause de F, par exemple $C = x \vee y \vee \neg z \vee u \vee \neg v \vee w \vee t$.
    - On introduit de nouvelles variables a, b, c, d associées à cette clause, et on remplace C par la formule $R(C) = (x \vee y \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg z \vee b) \wedge (\neg b \vee u \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg v \vee d) \wedge (\neg d \vee w \vee t)$.
    - Il est facile de vérifier qu'une assignation de x, y, z, u, v, w, t peut être complétée par une assignation de a, b, c, d de façon à rendre cette formule vraie si et seulement si C est vraie.
  - A partir de $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots C_\ell$, on construit

$$F' = R(C_1) \wedge R(C_2) \wedge \cdots \wedge R(C_\ell).$$

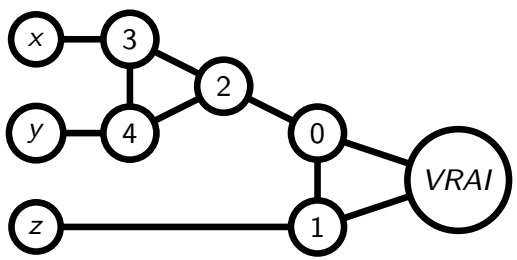
  - On a $F \in SAT$ ssi $F' \in$ 3-SAT.
  - La fonction qui à F associe F' se calcule bien en temps polynomial.

Théorème

3-COLORABILITE *est* NP-*complet.*

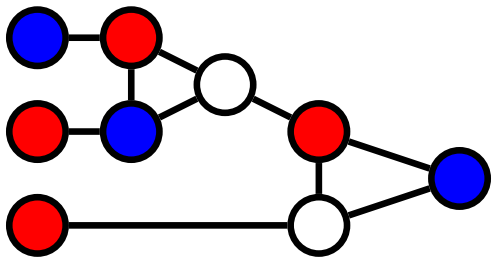
Preuve

- 3-COLORABILITE est dans NP : déjà vu.
- 3-SAT $\leq$ 3-COLORABILITE :
  - On se donne donc une conjonction F de clauses à 3 littéraux, et il nous faut à partir de là construire un graphe.
    - Il faut parvenir à traduire deux contraintes : une variable peut prendre la valeur 0 ou 1 d'une part, et les règles d'évaluation d'une clause d'autre part.
  - On construit un graphe ayant $3+2n+5m$ sommets, où n est le nombre de variables, m de clauses.
    1. Les trois premiers, notés *VRAI*, *FAUX*, *NSP* sont reliés deux à deux en triangle.
    2. On associe pour chaque variable x_i un sommet x_i et un sommet $\neg x_i$: on relie deux à deux en triangle les sommets x_i, $\neg x_i$, et *NSP*.
    3. On ajoute 5 sommets pour chaque clause $x \vee y \vee z$ selon le dessin suivant :



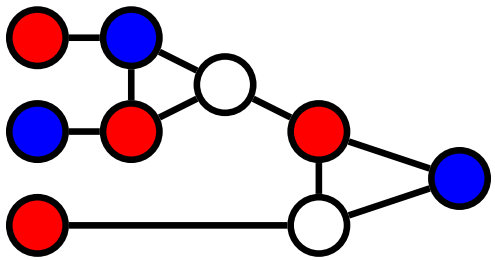
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



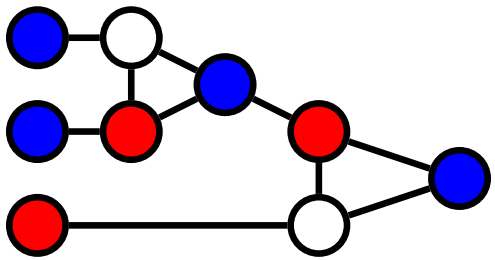
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



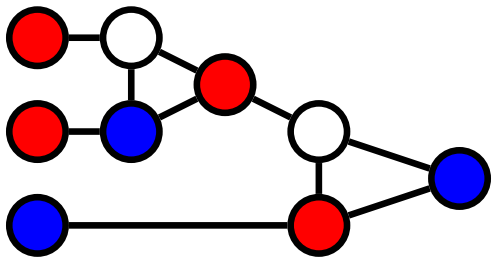
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



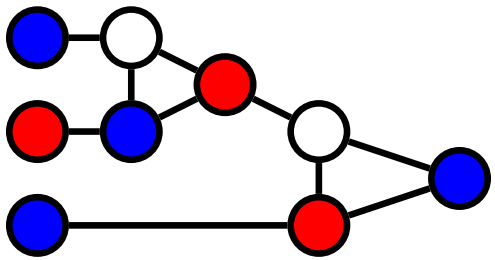
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



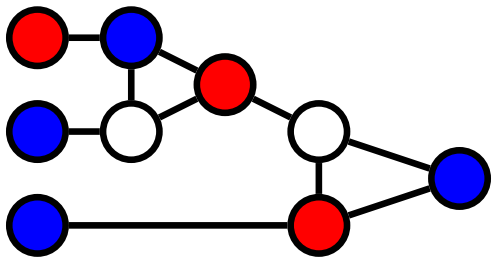
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



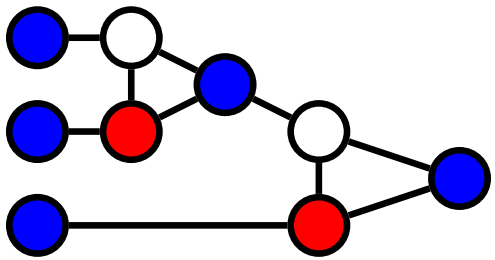
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



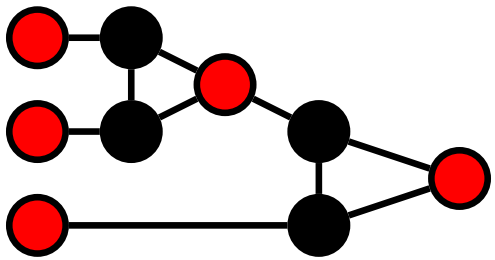
Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



Le gadget

- Si l'on impose que les trois sommets à gauche sont soit bleus soit rouges,
  - alors, on peut colorer le sommet le plus à droite en bleu si et seulement si au moins un sommet à gauche est en bleu.



- Si F est satisfiable, on peut colorier le graphe $G(F)$ avec 3-couleurs :
  - mettre les variables vraies avec la couleur du sommet *VRAI*, les variables fausses avec la couleur du sommet *FAUX*, et compléter.
- Si le graphe $G(F)$ est coloriable avec trois couleurs :
  - Le triangle 1. assure que *VRAI* et *FAUX* ne sont pas de la même couleur.
  - Le triangle 2. assure que x_i et $\neg x_i$ ne sont pas de la même couleur pour chaque variable x_i, et soit de la couleur de *VRAI* ou de la couleur de *FAUX*.
  - Le gadget 3. assure que pour chaque clause C au moins x ou y ou z est de la couleur de *VRAI*.
  - En prenant pour vraies toutes les variables de la couleur de *VRAI*, on obtient une affectation des variables qui satisfait la formule F.
- Bref : $F \in$ 3-SAT ssi $G(F) \in$ 3-COLORABILITE.
- La fonction qui à F associe $G(F)$ se calcule bien en temps polynomial.

Au menu

Complexité en temps

La classe P

La classe NP

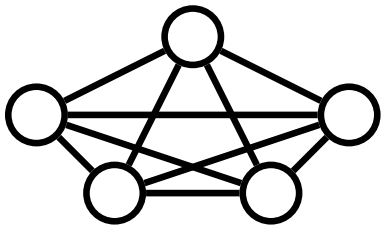
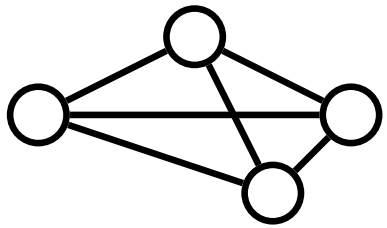
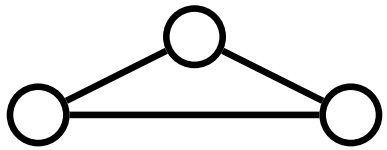
NP-complétude

Quelques autres problèmes NP-complets célèbres

Sur les graphes

- *CLIQUE*

Donnée: Un graphe $G = (V, E)$ non-orienté et un entier k.
Réponse: Décider s'il existe $V' \subset V$, avec $|V'| = k$, tel que $u, v \in V' \Rightarrow (u, v) \in E$.

K_5 :  K_4 :  K_3 : 

En passant au complémentaire sur les arêtes :

- *STABLE*

Donnée: Un graphe $G = (V, E)$ non-orienté et un entier k.
Réponse: Décider s'il existe $V' \subset V$, avec $|V'| = k$, tel que $u, v \in V' \Rightarrow (u, v) \notin E$.

En passant au complémentaire sur les sommets :

- *RECOUVREMENT DE SOMMETS*

Donnée: Un graphe $G = (V, E)$ non-orienté et un entier k.
Réponse: Décider s'il existe $V' \subset V$, avec $|V'| \leq k$, tel que toute arête de G ait au moins une extrémité dans V'.

Sur les graphes

- *CIRCUIT HAMILTONIEN*

Donnée: Un graphe $G = (V, E)$ (non-orienté).

Réponse: Décider s'il existe un **circuit hamiltonien**, c'est-à-dire un chemin de G passant une fois et une seule par chacun des sommets et revenant à son point de départ.

- *VOYAGEUR DE COMMERCE*

Donnée: Un couple (n, M), où M est une matrice $n \times n$ d'entiers et un entier k.

Réponse: Décider s'il existe une permutation π de $[1, 2, \cdots, n]$ telle que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} M_{\pi(i)\pi(i+1)} \leq k.$$

- Ce problème porte ce nom, car on peut voir cela comme l'établissement de la tournée d'un voyageur de commerce devant visiter n villes, dont les distances sont données par la matrice M de façon à faire moins de k kilomètres.

Sur les entiers

- *SOMME DE SOUS ENSEMBLE*

Donnée: Une suite finie d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et un entier t.
Réponse: Décider s'il existe $E \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{i \in E} x_i = t$.

- *PARTITION*

Donnée: Une suite finie d'entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Réponse: Décider s'il existe $E \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\sum_{i \in E} x_i = \sum_{i \notin E} x_i$.

- *SAC A DOS*

Donnée: Un ensemble de poids $a_1, \cdots, a_n$, un ensemble de valeurs $v_1, \cdots, v_n$, un poids limite A, et un entier V.
Réponse: Décider s'il existe $E' \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que $\sum_{i \in E'} a_i \leq A$ et $\sum_{i \in E'} v_i \geq V$.