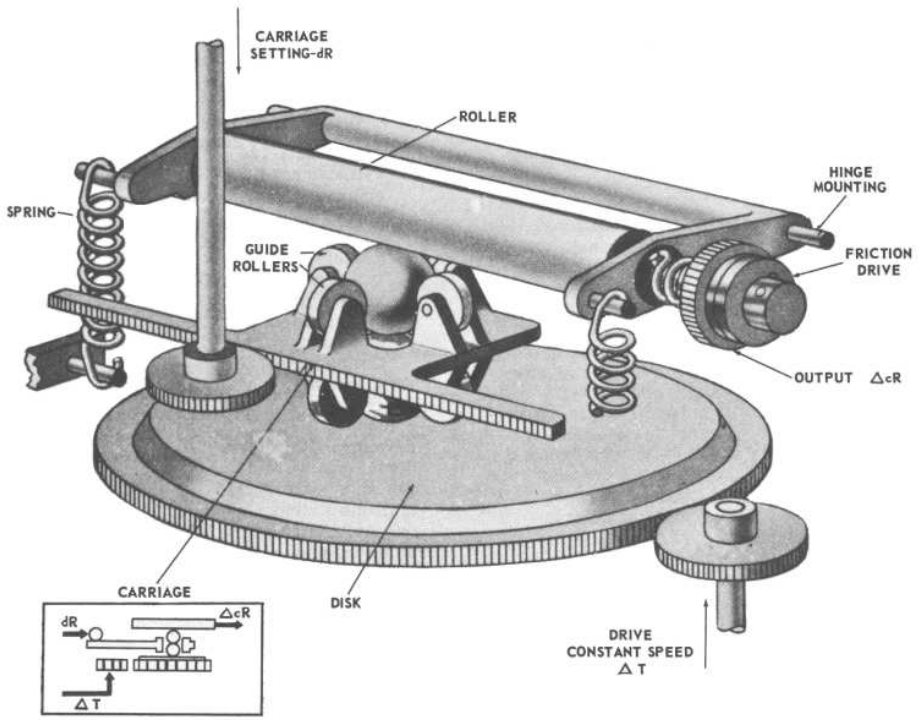
Cours 5: Thèse de Church. Indécidabilité.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
INF412

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

  4: (possibilité de la mise en place d'un tutorat).

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

  4: (possibilité de la mise en place d'un tutorat).
  5: demain, mercredi: repas avec les délégués.

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

  4: (possibilité de la mise en place d'un tutorat).
  5: demain, mercredi: repas avec les délégués.
  6: mercredi dans une semaine: PC notée.

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

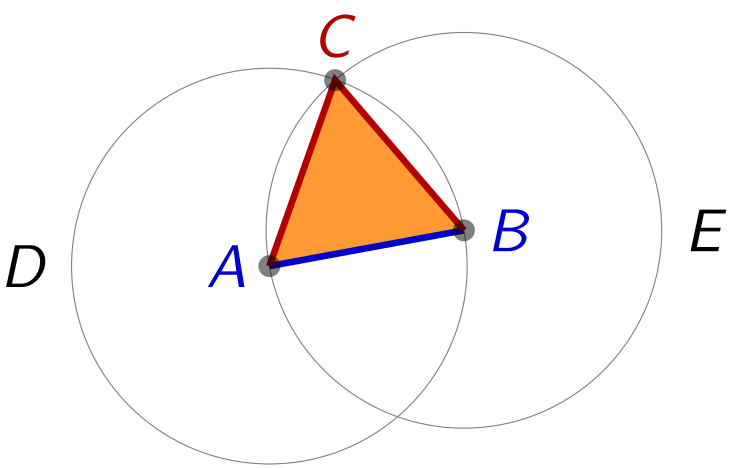
Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

Objectif

- Objectif de ce cours : répondre à la question suivante :

> Qu'est-ce qu'un algorithme ?



Exemple d'algorithme :

Pour construire un triangle équilatéral ayant pour coté AB : tracer le cercle de centre A de rayon AB ; tracer le cercle de centre B de rayon AB. Nommer C l'une des intersections de ces deux cercles. Le triangle ABC est la solution recherchée.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
  - ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

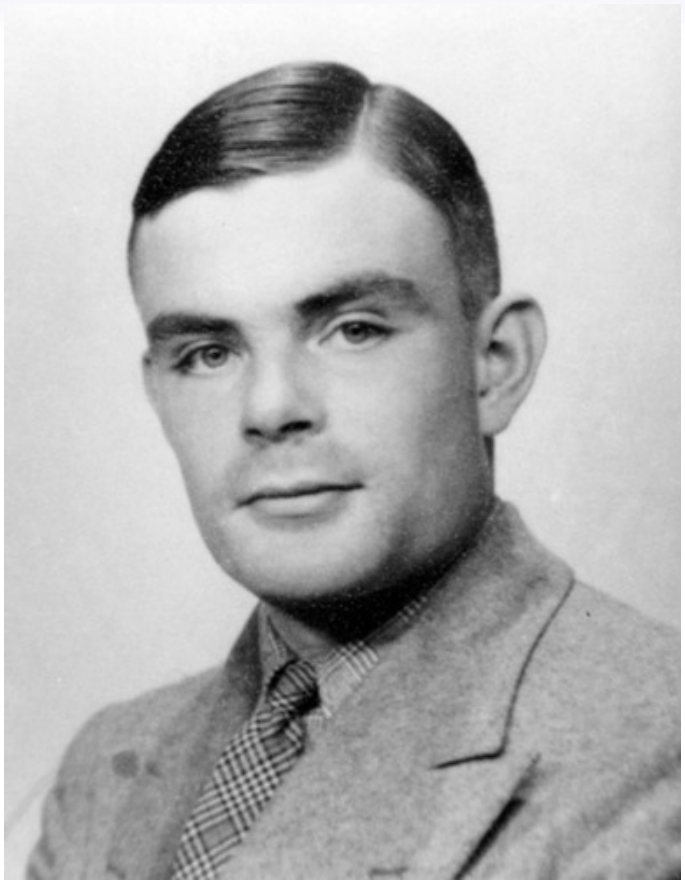
Thèse de Church

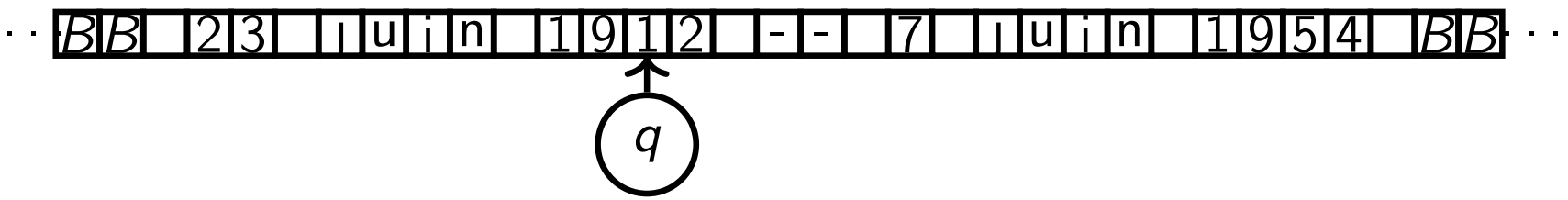
- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
  - ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.
    - (exprimée clairement pour la première fois par Stephen Kleene, étudiant en thèse d'Alonzo Church.)

Parenthèse historique

- Théorie de la relativité : 1907/1915
- Théorème d'incomplétude : 1931

Alan M. Turing





- Machines de Turing : 1936

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :

- Et en fait de la question suivante "*Entscheidungsproblem*" :

> Peut-on décider mécaniquement
> si un énoncé est démontrable ou non ?

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :
- Et en fait de la question suivante "*Entscheidungsproblem*" :

> Peut-on décider mécaniquement
> si un énoncé est démontrable ou non ?

- Il s'avère que préciser "mécaniquement", c'est formaliser la notion d'algorithme.

Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

Plus précisément

Thèse de Church

- L'objectif de cette partie du cours
- Variantes de la notion de machine de Turing
- Autres modèles : haut niveau

Thèse de Church

- Thèse de Church:

> Calculable dans un sens intuitif
> correspond à
> calculable par machine de Turing

Plus précisément

Thèse de Church

- L'objectif de cette partie du cours
- Variantes de la notion de machine de Turing
- Autres modèles : haut niveau

Robustesse du modèle

- Le modèle de la machine de Turing est extrêmement robuste.
- On peut en effet envisager de nombreuses variantes autour du concept de machine de Turing,

Robustesse du modèle

- Le modèle de la machine de Turing est extrêmement robuste.
- On peut en effet envisager de nombreuses variantes autour du concept de machine de Turing,
  - mais chacune de ces variantes ne change pas ce que l'on arrive à programmer avec ces machines.

Restriction à un alphabet binaire

Théorème

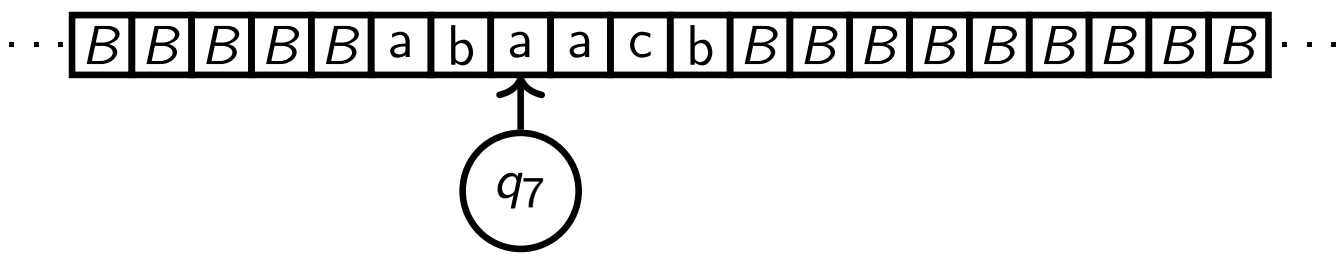
Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.

Restriction à un alphabet binaire

Théorème

Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.

- Idée de la démonstration :
  - Machine M sur l'alphabet $\{a, b, c\}$

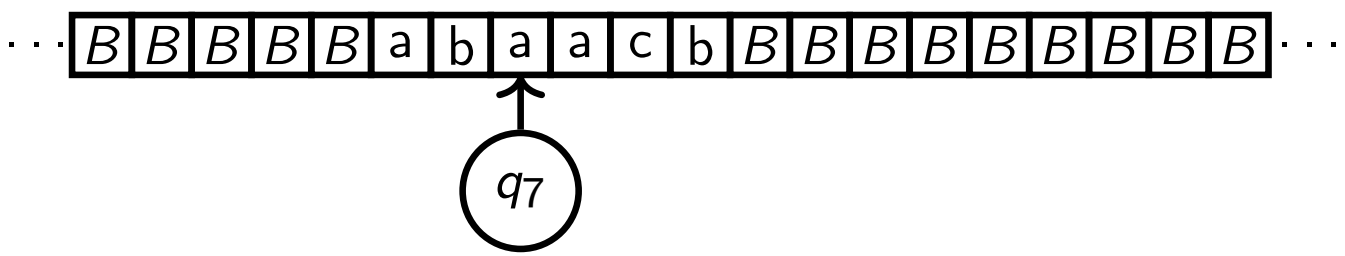


Restriction à un alphabet binaire

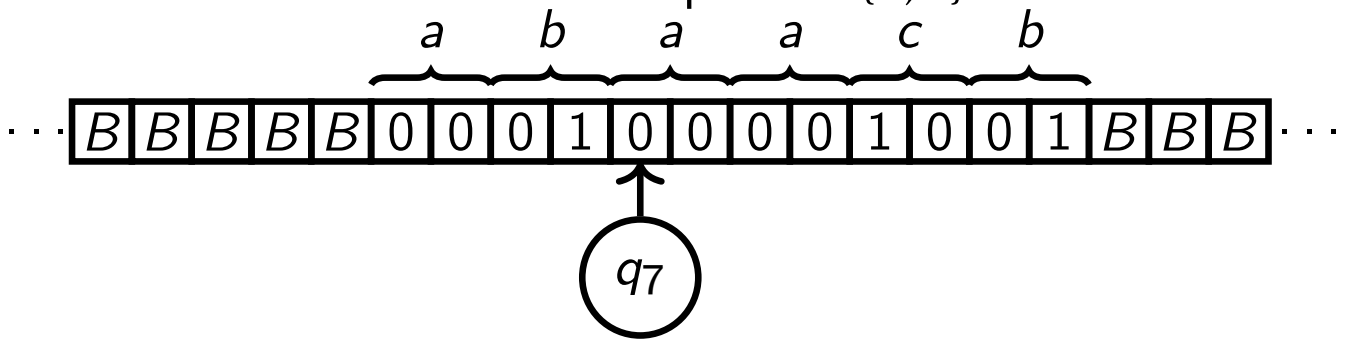
Théorème

Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.

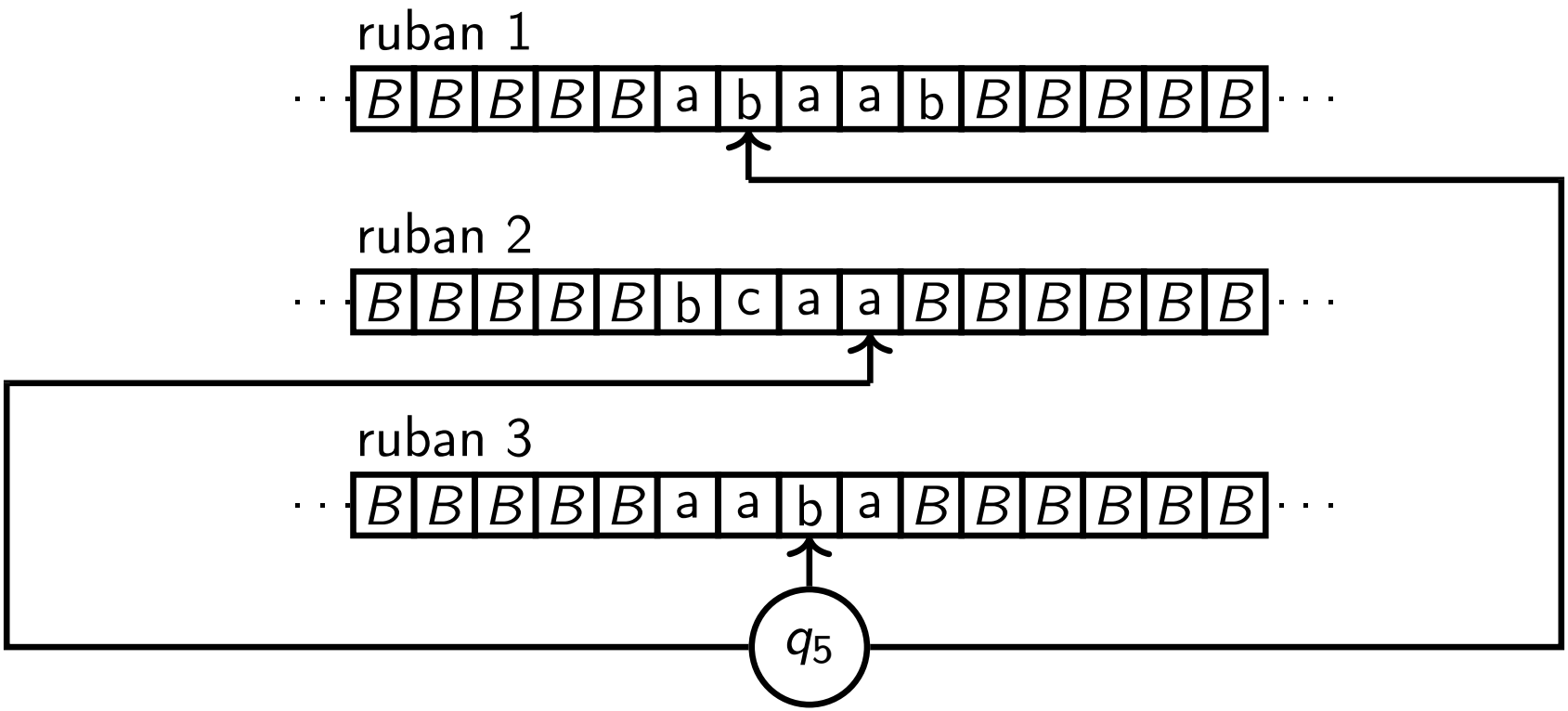
- Idée de la démonstration :
  - Machine M sur l'alphabet $\{a, b, c\}$



  - Machine M' simulant M sur l'alphabet $\{0, 1\}$.



Machines de Turing à plusieurs rubans



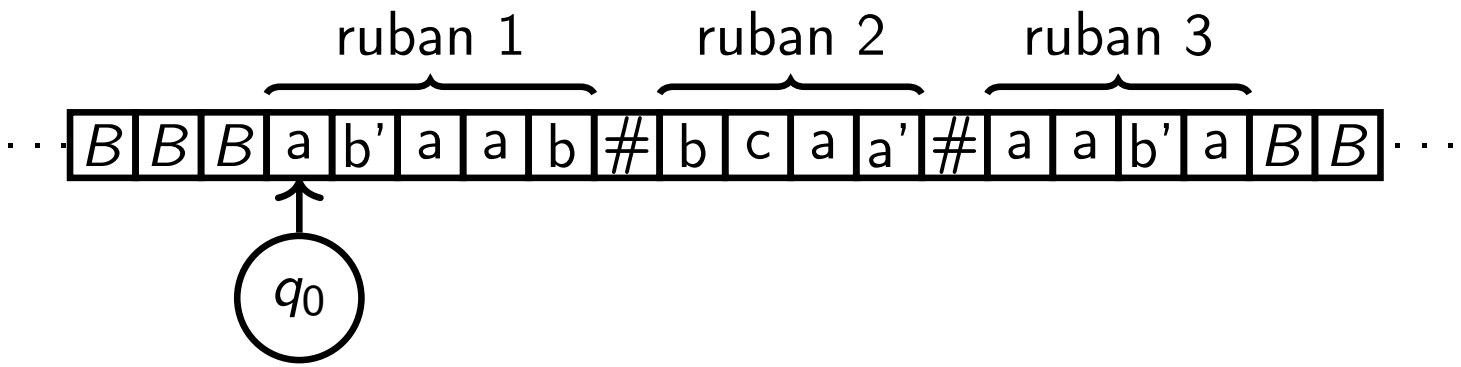
Théorème

Toute machine de Turing qui travaille avec k rubans peut être simulée par une machine de Turing avec un unique ruban.

Théorème

Toute machine de Turing qui travaille avec k rubans peut être simulée par une machine de Turing avec un unique ruban.

- Idée de la démonstration :



- Le modèle de la machine de Turing peut paraître extrêmement rudimentaire.
- Il n'en demeure pas moins extrêmement puissant, et capable de capturer la notion de *calculable* en informatique.

Plus précisément

Thèse de Church

- L'objectif de cette partie du cours
- Variantes de la notion de machine de Turing
- Autres modèles : haut niveau

Machines RAM (Random Access Machine)

- Un modèle de calcul qui ressemble beaucoup plus aux langages machine actuels, et à la façon dont fonctionnent les processeurs actuels.

Machines RAM (Random Access Machine)

- Un modèle de calcul qui ressemble beaucoup plus aux langages machine actuels, et à la façon dont fonctionnent les processeurs actuels.
  - (Similaire/Alternative à la Machine virtuelle du cours INF371)

Machines RAM (Random Access Machine)

- Un modèle de calcul qui ressemble beaucoup plus aux langages machine actuels, et à la façon dont fonctionnent les processeurs actuels.
  - (Similaire/Alternative à la Machine virtuelle du cours INF371)
- Une machine RAM possède des registres qui contiennent des entiers naturels (nuls si pas encore initialisés).

Machines RAM (Random Access Machine)

- Un modèle de calcul qui ressemble beaucoup plus aux langages machine actuels, et à la façon dont fonctionnent les processeurs actuels.
  - (Similaire/Alternative à la Machine virtuelle du cours INF371)
- Une machine RAM possède des registres qui contiennent des entiers naturels (nuls si pas encore initialisés).
- Les instructions autorisées dépendent du processeur que l'on veut modéliser, mais elles incluent en général la possibilité de :
  1. copier le contenu d'un registre dans un autre ;
  2. l'adressage indirect : récupérer/écrire le contenu d'un registre dont le numéro est donné par la valeur d'un autre registre ;
  3. effectuer des opérations élémentaires sur un ou des registres, par exemple additionner 1, soustraire 1 ou tester l'égalité à 0 ;
  4. effectuer d'autres opérations sur un ou des registres, par exemple l'addition, la soustraction, la multiplication, division, les décalages binaires, les opérations binaires bit à bit.

Machines RISC (Reduced Instruction Set)

- Une machine RISC est une machine RAM dont les instructions sont uniquement de la forme :
  1. $x_0 \leftarrow 0$;
  2. $x_0 \leftarrow x_0 + 1$;
  3. $x_0 \leftarrow x_0 \ominus 1$;
  4. **if** x_0 = 0 then aller \‘a l’instruction num\’ero j ;
  5. $x_0 \leftarrow x_i$;
  6. $x_i \leftarrow x_0$;
  7. $x_0 \leftarrow x_{x_i}$;
  8. $x_{x_0} \leftarrow x_i$.

Machines RISC vs Machines de Turing

Théorème

Toute machine RISC peut être simulée par une machine de Turing.

Machines RISC vs Machines de Turing

Théorème

Toute machine RISC peut être simulée par une machine de Turing.

- (et réciproquement).

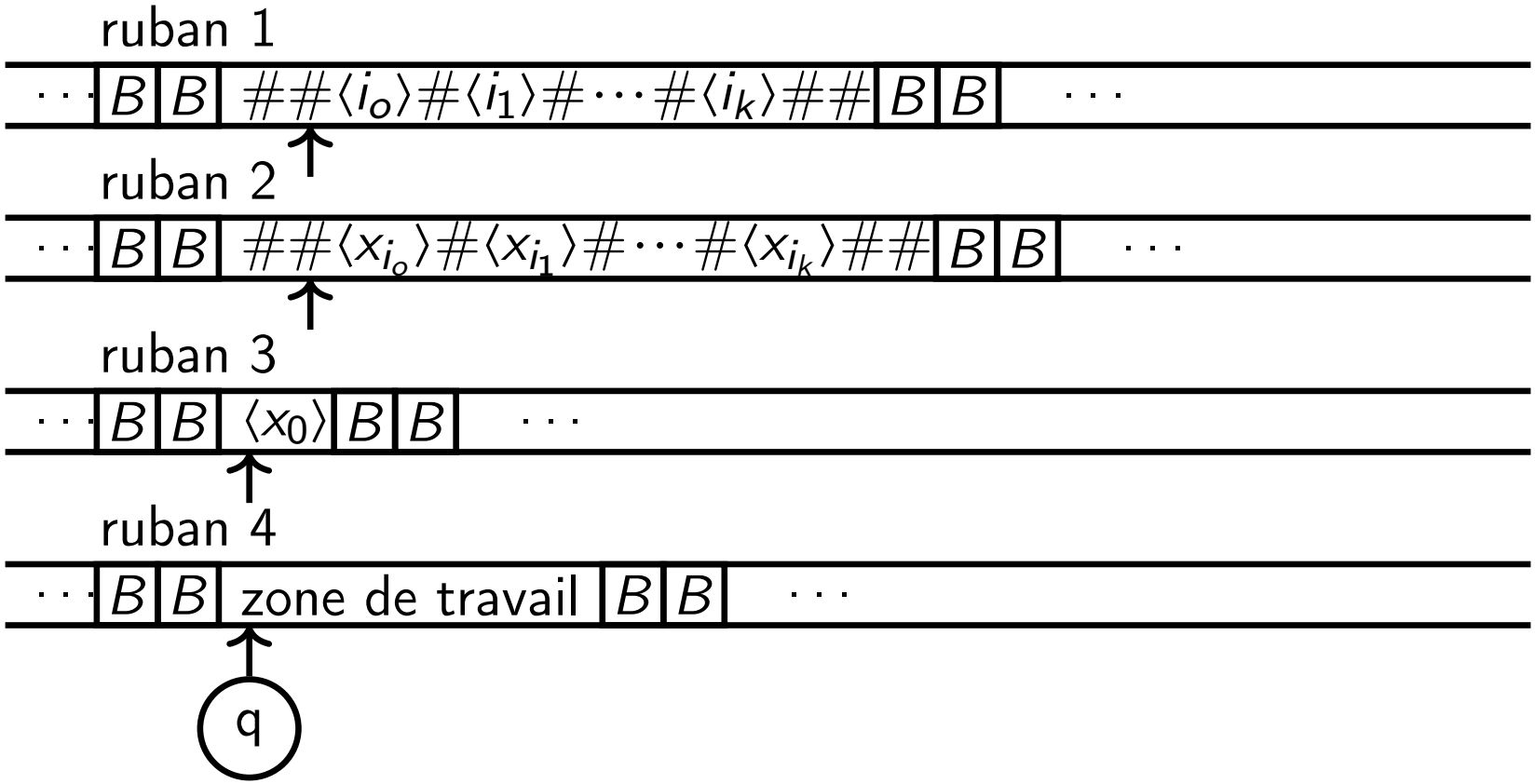
Idée de la démonstration

- La machine de Turing qui simule la machine RISC possède 4 rubans. Les deux premiers rubans codent les couples (i, x_i) pour x_i non nul. Le troisième ruban code l'accumulateur x_0 et le quatrième est un ruban de travail.
  - Pour un un entier i, notons $\langle i \rangle$ son écriture en binaire.
- Plus précisément :
  - Le premier ruban code un mot de la forme
    $$\#\#\langle i_o \rangle \# \langle i_1 \rangle \# \cdots \# \langle i_k \rangle \#\#;$$
  - Le second ruban code un mot de la forme
    $$\#\#\langle x_{i_o} \rangle \# \langle x_{i_1} \rangle \# \cdots \# \langle x_{i_k} \rangle \#\#;$$
  - Le troisième ruban code
    $$\langle x_0 \rangle.$$
- On appelle **position standard** la position où les têtes de lecture des deux premiers rubans sont sur le deuxième $\#$, et la tête de lecture des autres rubans est tout à gauche.

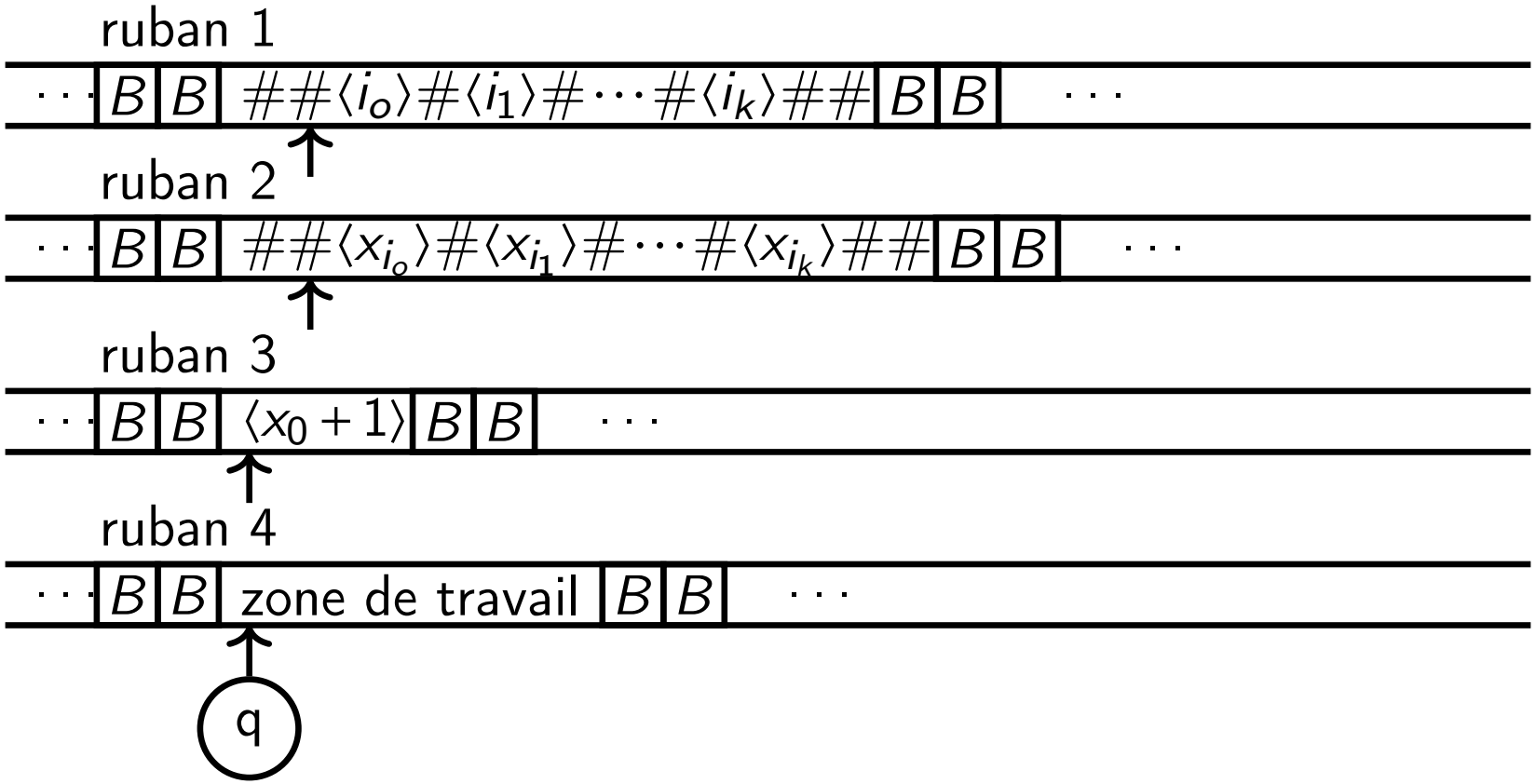
Idée de la démonstration

- La machine de Turing qui simule la machine RISC possède 4 rubans. Les deux premiers rubans codent les couples (i, x_i) pour x_i non nul. Le troisième ruban code l'accumulateur x_0 et le quatrième est un ruban de travail.
  - Pour un un entier i, notons $\langle i \rangle$ son écriture en binaire.
- Plus précisément :
  - Le premier ruban code un mot de la forme
    $$\#\#\langle i_o \rangle \# \langle i_1 \rangle \# \cdots \# \langle i_k \rangle \#\#;$$
  - Le second ruban code un mot de la forme
    $$\#\#\langle x_{i_o} \rangle \# \langle x_{i_1} \rangle \# \cdots \# \langle x_{i_k} \rangle \#\#;$$
  - Le troisième ruban code
    $$\langle x_0 \rangle.$$
- On appelle **position standard** la position où les têtes de lecture des deux premiers rubans sont sur le deuxième $\#$, et la tête de lecture des autres rubans est tout à gauche.
- La simulation est décrite pour seulement 3 exemples.

$x_0 := x_0 + 1$


ruban 1
$\cdots$ B B $\#\#\langle i_o\rangle\#\langle i_1\rangle\#\cdots\#\langle i_k\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 2
$\cdots$ B B $\#\#\langle x_{i_o}\rangle\#\langle x_{i_1}\rangle\#\cdots\#\langle x_{i_k}\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 3
$\cdots$ B B $\langle x_0\rangle$ B B $\cdots$
ruban 4
$\cdots$ B B zone de travail B B $\cdots$
q

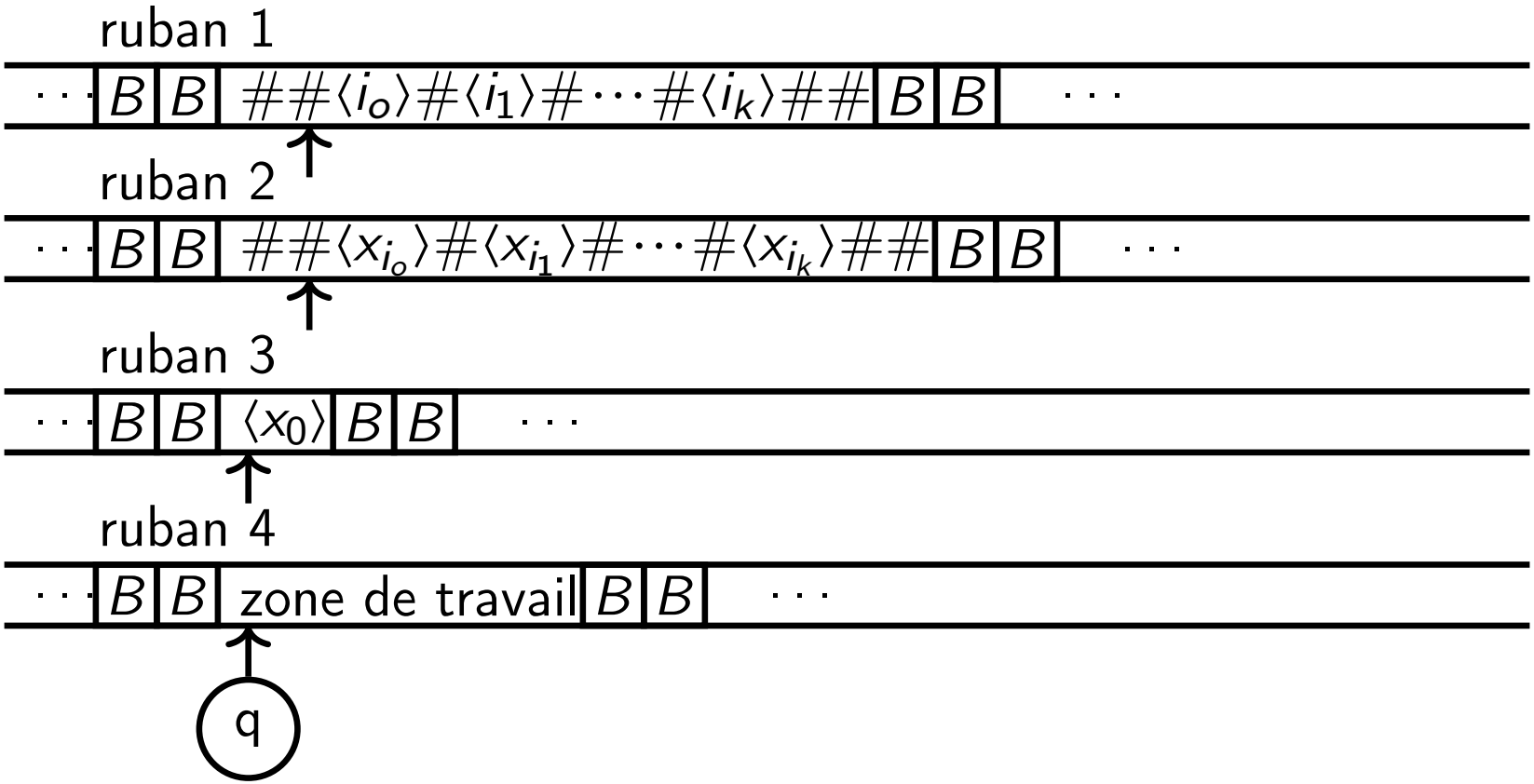
$x_0 := x_0 + 1$


ruban 1
$\cdots$ B B $\#\#\langle i_o\rangle\#\langle i_1\rangle\#\cdots\#\langle i_k\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 2
$\cdots$ B B $\#\#\langle x_{i_o}\rangle\#\langle x_{i_1}\rangle\#\cdots\#\langle x_{i_k}\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 3
$\cdots$ B B $\langle x_0 + 1\rangle$ B B $\cdots$
ruban 4
$\cdots$ B B zone de travail B B $\cdots$
q

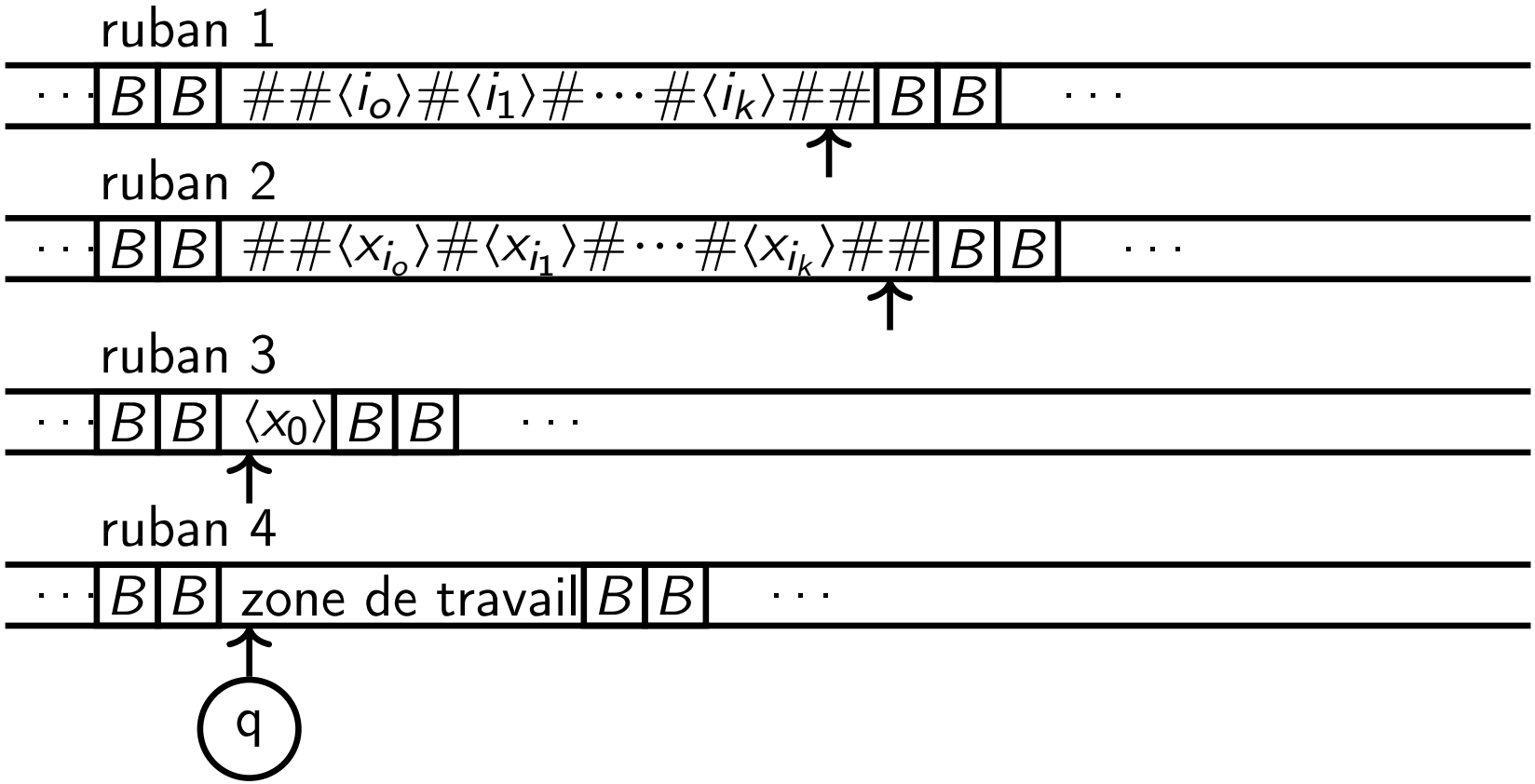
- $x_0 \leftarrow x_0 + 1$:

  1. on déplace la tête de lecture du ruban 3 tout à droite jusqu'à atteindre un symbole B.
  2. On se déplace alors d'une case vers la gauche, et on remplace les 1 par des 0, en se déplaçant vers la gauche tant que possible.
  3. Lorsqu'un 0 ou un blanc est trouvé, on le change en 1 et on se déplace (possiblement) à gauche pour revenir en position standard.

$x_{23} := x_0$

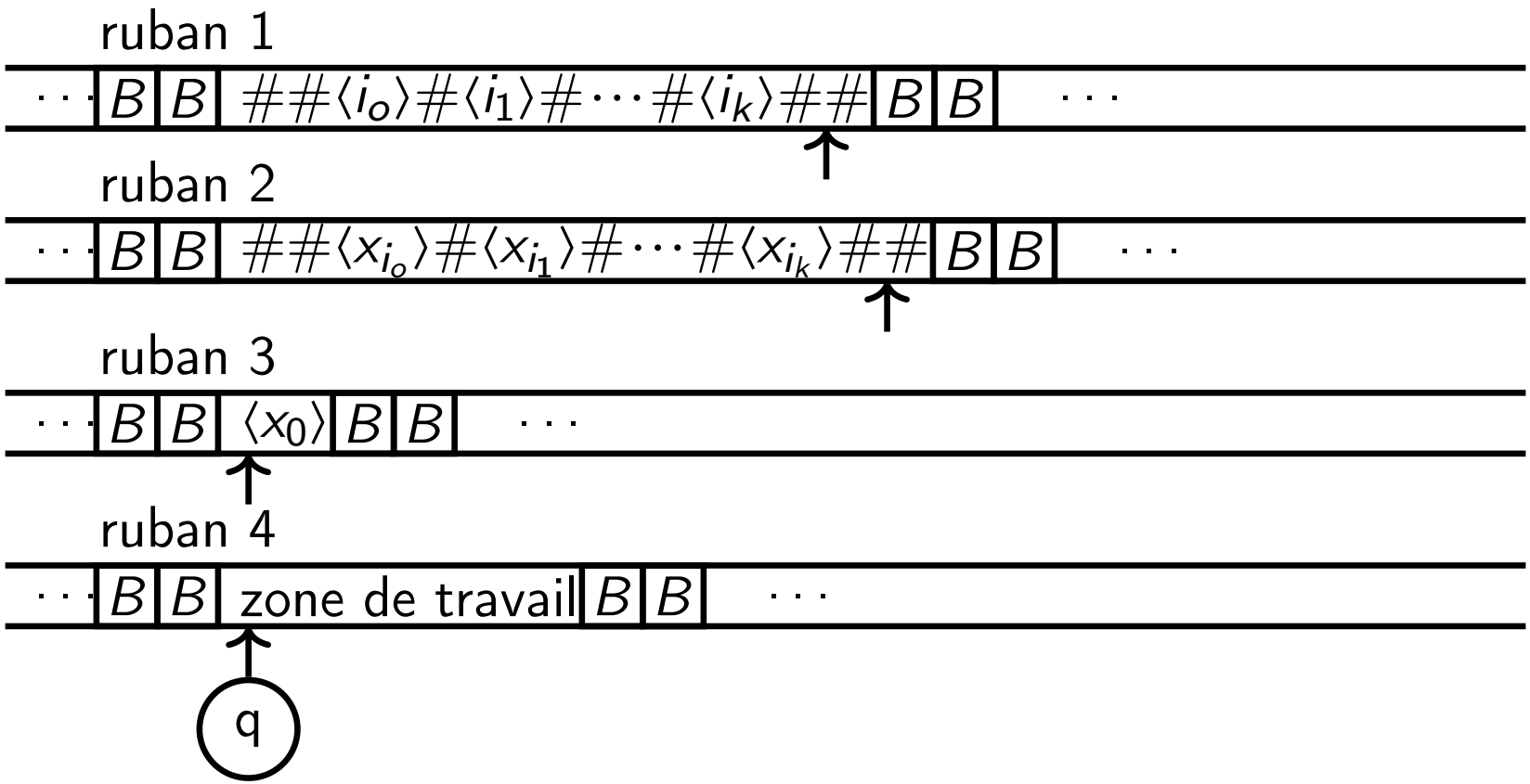

ruban 1
B B ##⟨i_o⟩#⟨i_1⟩#···#⟨i_k⟩## B B
ruban 2
B B ##⟨x_{i_o}⟩#⟨x_{i_1}⟩#···#⟨x_{i_k}⟩## B B
ruban 3
B B ⟨x_0⟩ B B
ruban 4
B B zone de travail B B
q

$x_{23} := x_0$


ruban 1
$\cdots$ B B $\#\#\langle i_o\rangle\#\langle i_1\rangle\#\cdots\#\langle i_k\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 2
$\cdots$ B B $\#\#\langle x_{i_o}\rangle\#\langle x_{i_1}\rangle\#\cdots\#\langle x_{i_k}\rangle\#\#$ B B $\cdots$
ruban 3
$\cdots$ B B $\langle x_0\rangle$ B B $\cdots$
ruban 4
$\cdots$ B B zone de travail B B $\cdots$
q

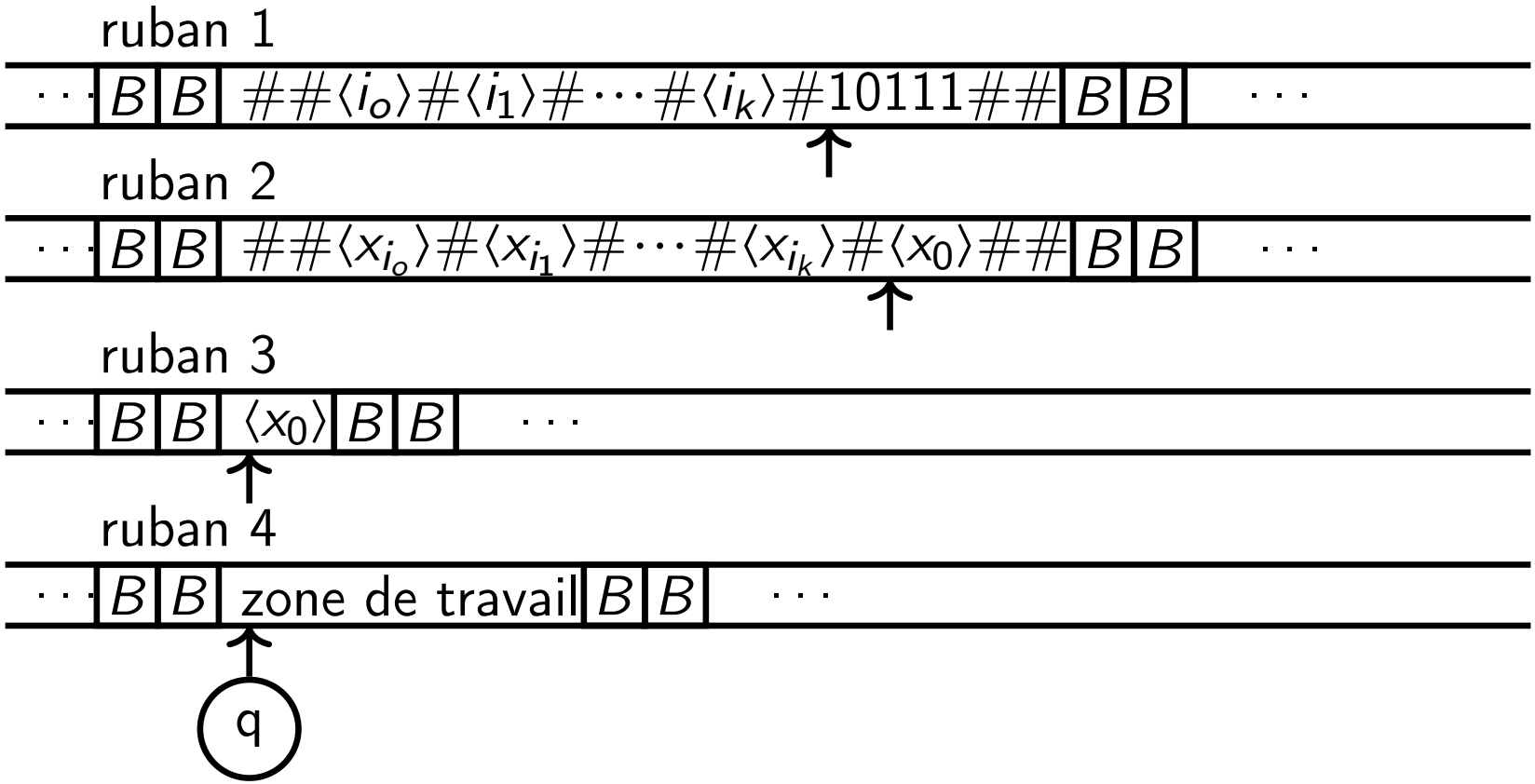
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} n'a jamais été écrit

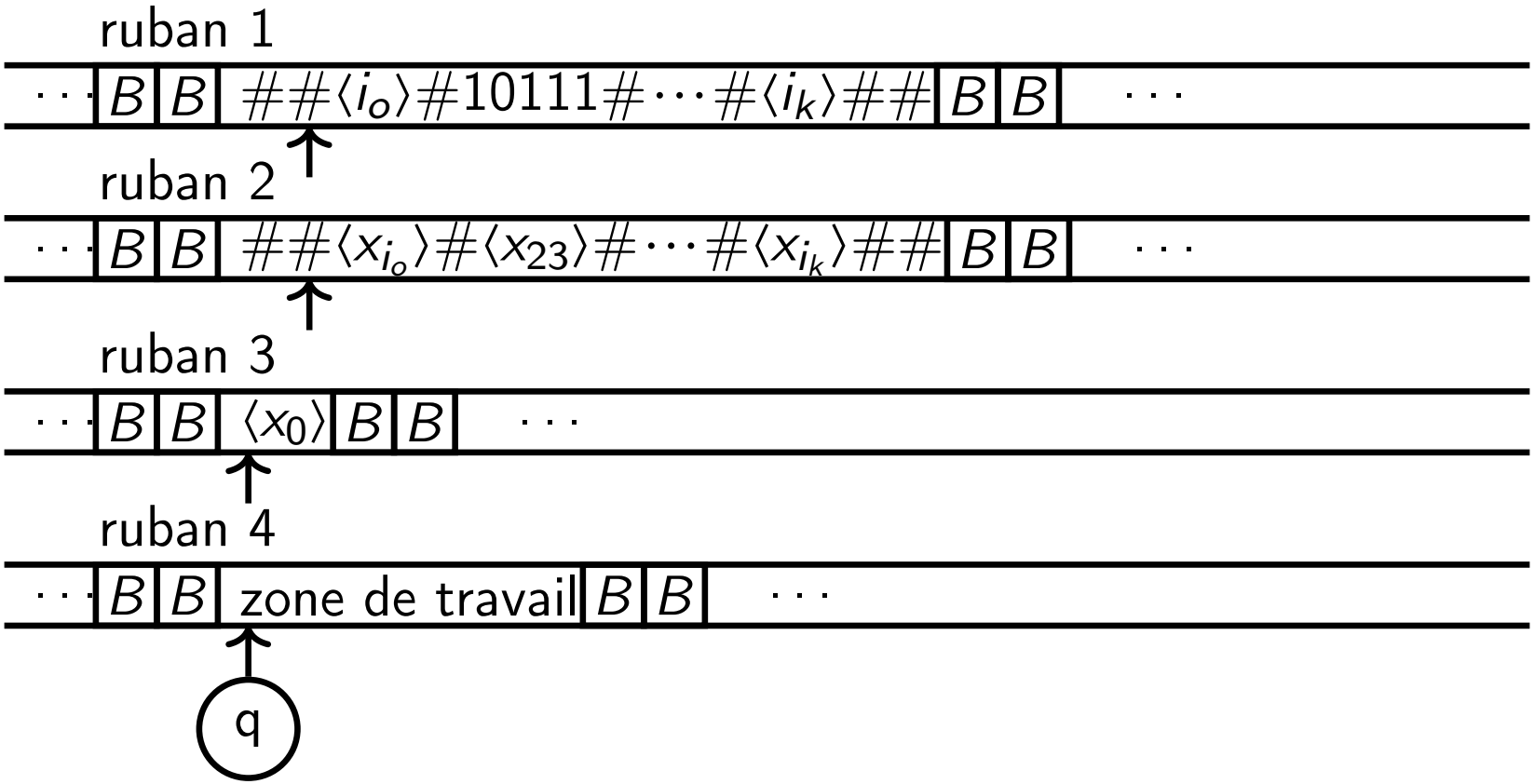


$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} n'a jamais été écrit

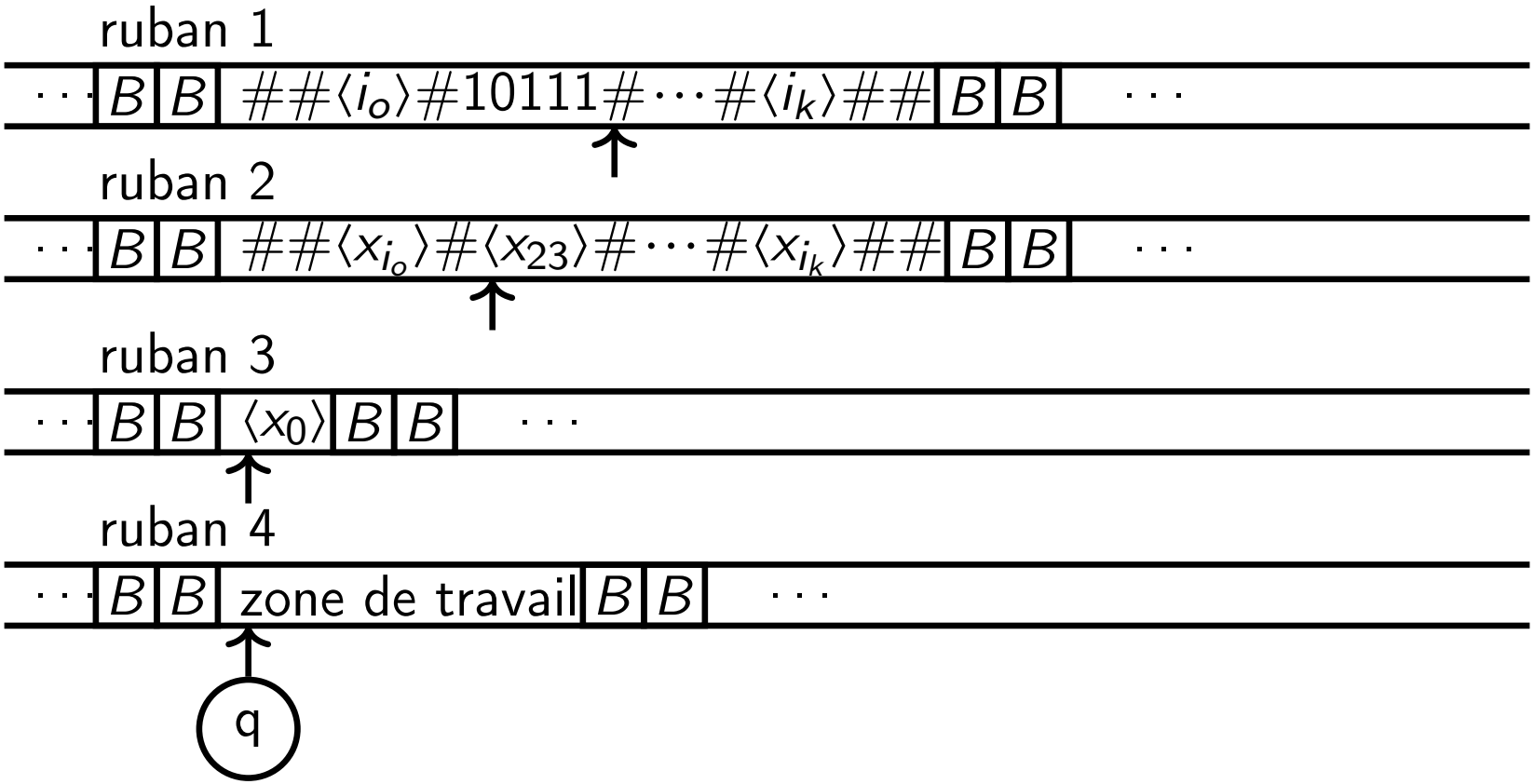


$x_{23} := x_0$


ruban 1
B B ##⟨i_o⟩#10111#···#⟨i_k⟩## B B ···
ruban 2
B B ##⟨x_{i_o}⟩#⟨x_{23}⟩#···#⟨x_{i_k}⟩## B B ···
ruban 3
B B ⟨x_0⟩ B B ···
ruban 4
B B zone de travail B B ···
q

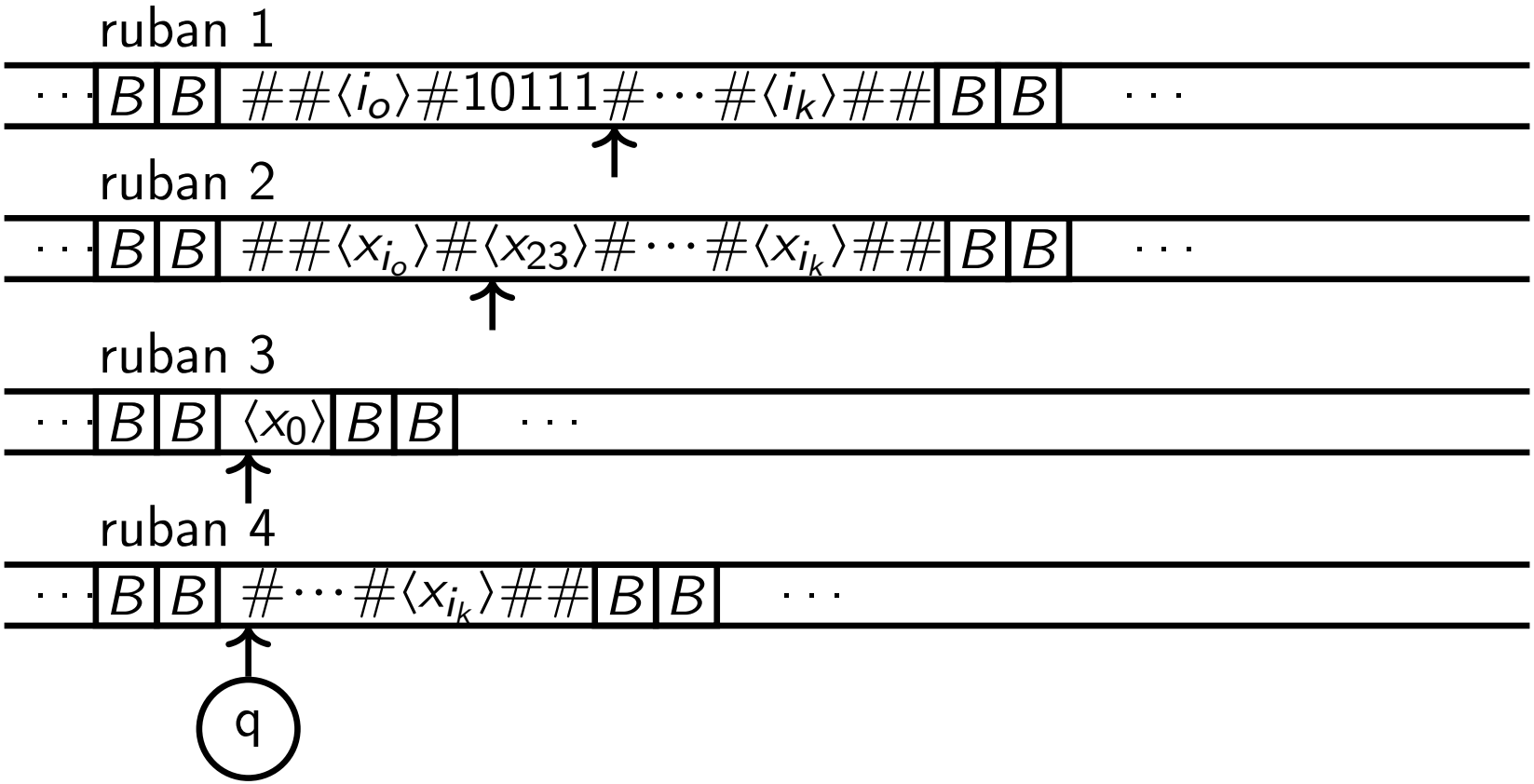
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} a déjà été écrit



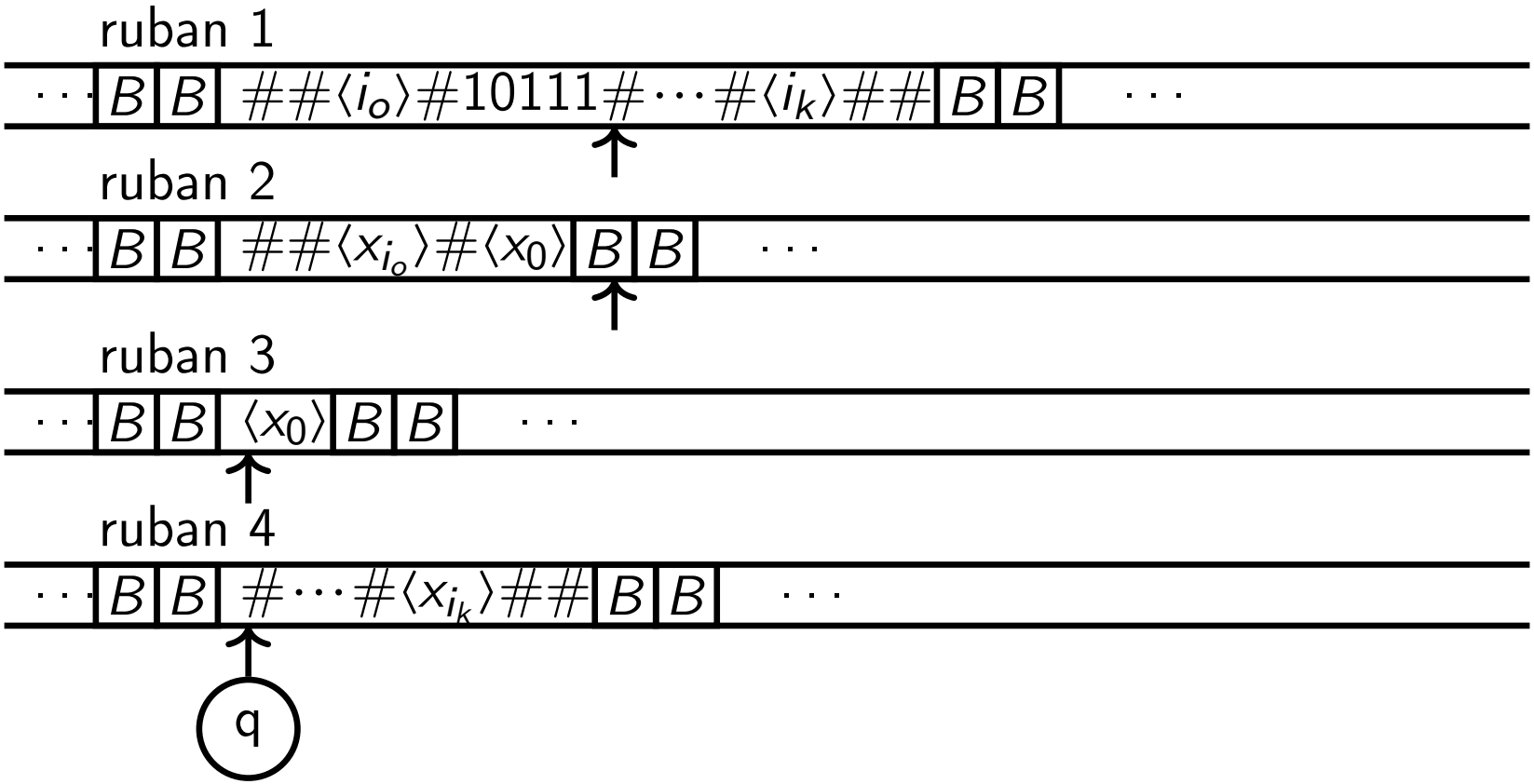
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} a déjà été écrit



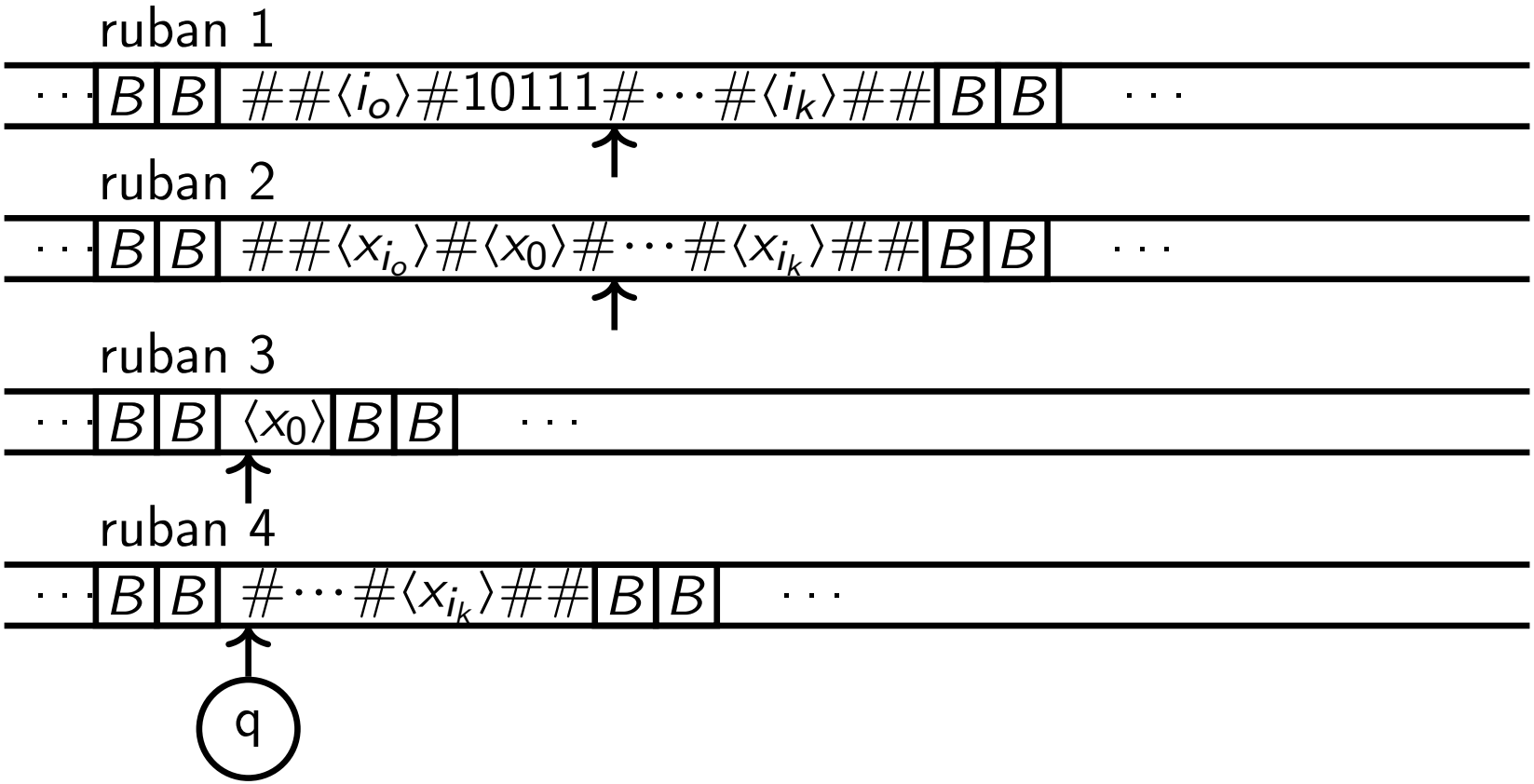
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} a déjà été écrit



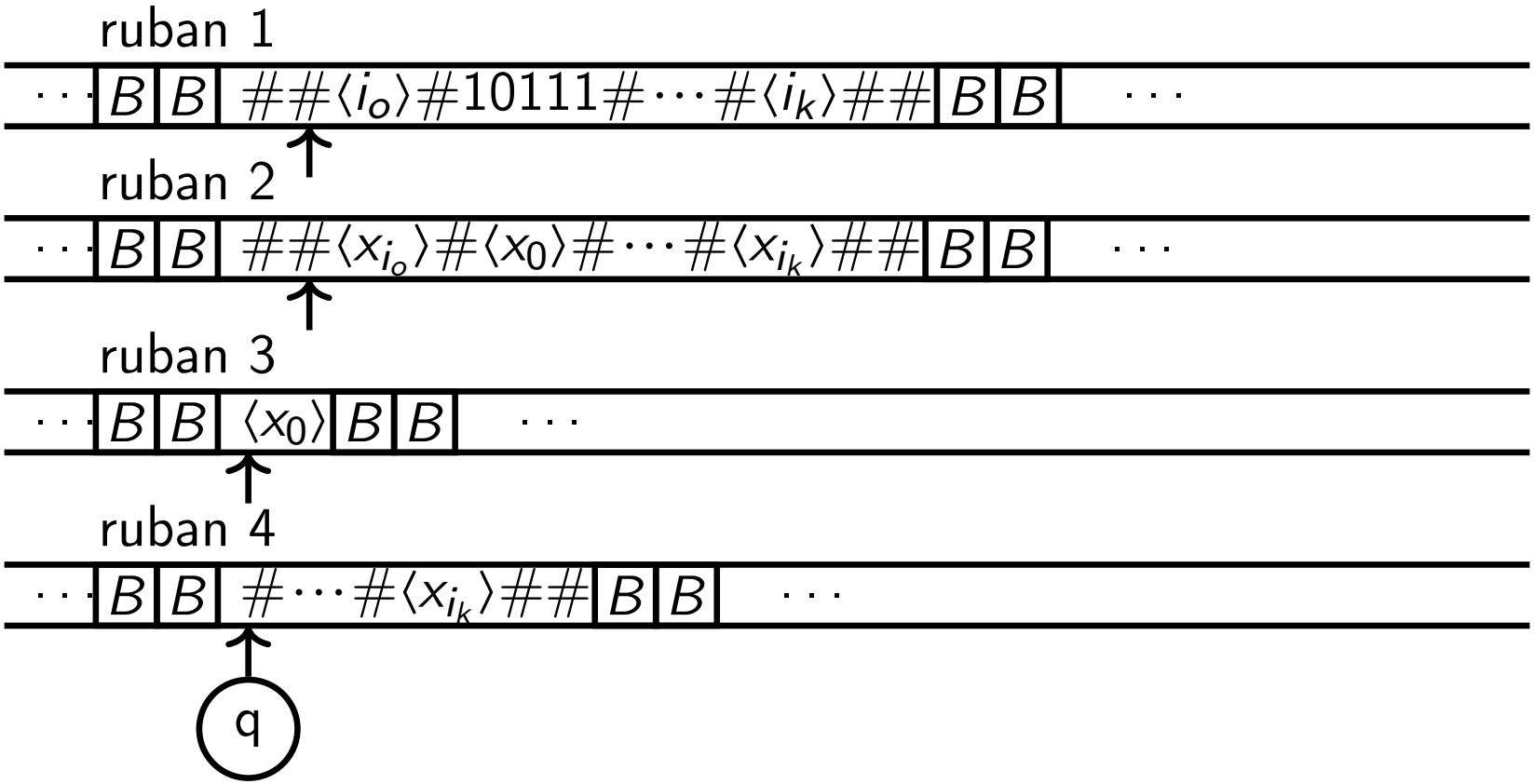
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} a déjà été écrit



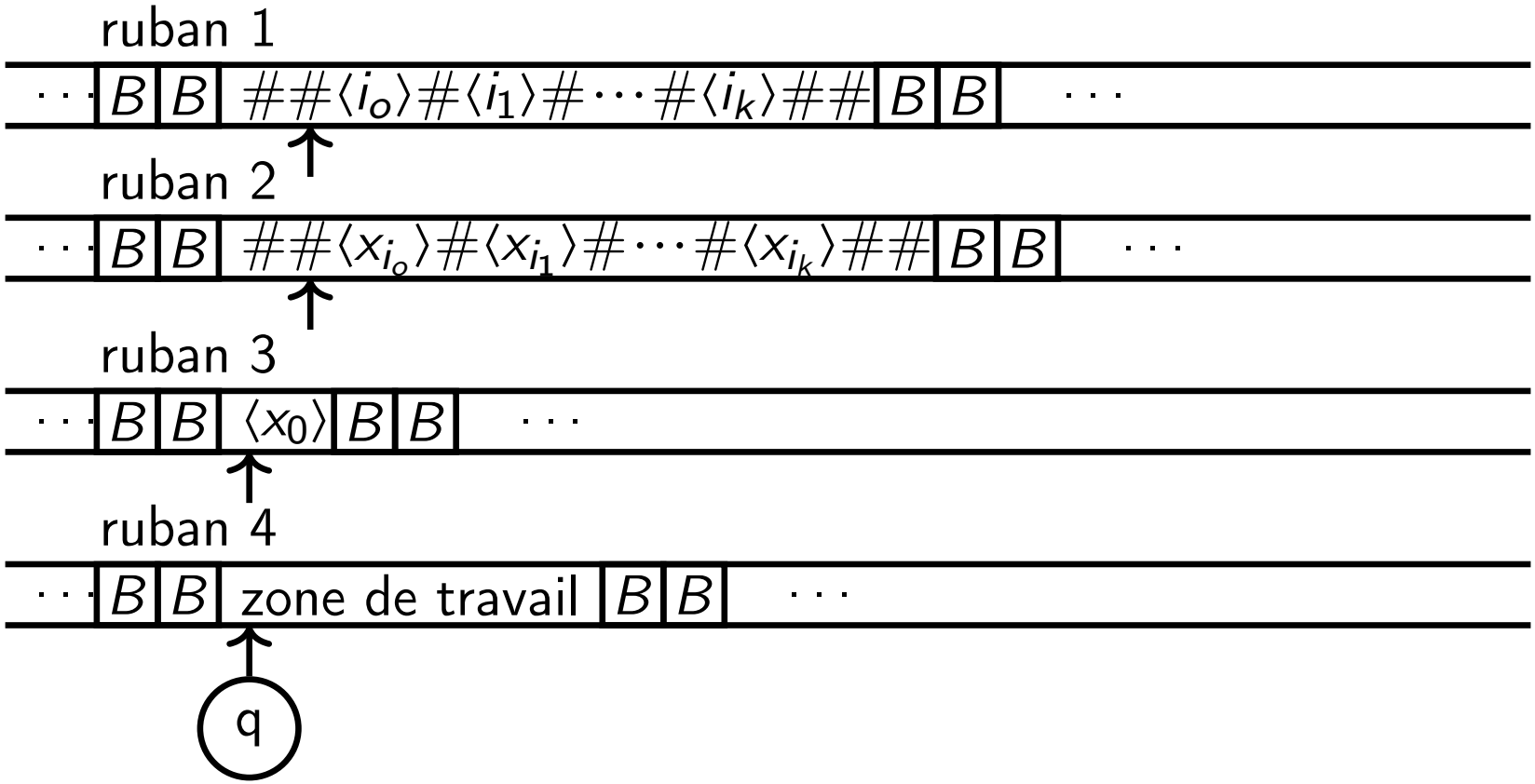
$x_{23} := x_0$

- Si x_{23} a déjà été écrit



- $x_{23} \leftarrow x_0$:
  - on parcourt les rubans 1 et 2 vers la droite, bloc par bloc, jusqu'à atteindre la fin du ruban 1, ou ce que l'on lise un bloc #10111# (10111 correspond à 23 en binaire).
  - Si la fin du ruban 1 a été atteinte, alors l'emplacement 23 n'a jamais été vu auparavant. On l'ajoute en écrivant 10111 à la fin du ruban 1, et on recopie le ruban 3 (la valeur de x_0) sur le ruban 2. On retourne alors en position standard.
  - Sinon, c'est que l'on a trouvé #10111# sur le ruban 1. On lit alors $\langle x_{23} \rangle$ sur le ruban 2. Dans ce cas, il doit être modifié. On fait cela de la façon suivante :
    1. On copie le contenu à droite de la tête de lecture numéro 2 sur le ruban 4.
    2. On copie le contenu du ruban 3 (la valeur de x_0) à la place de x_{23} sur le ruban 2.
    3. On écrit #, et on recopie le contenu du ruban 4 à droite de la tête de lecture du ruban 2, de façon à restaurer le reste du ruban 2.
    4. On retourne en position standard.

$x_0 := x_{x_{23}}$


ruban 1
B B ##⟨i_o⟩#⟨i_1⟩#···#⟨i_k⟩## B B
ruban 2
B B ##⟨x_{i_o}⟩#⟨x_{i_1}⟩#···#⟨x_{i_k}⟩## B B
ruban 3
B B ⟨x_0⟩ B B
ruban 4
B B zone de travail B B
q

- $x_0 \leftarrow x_{x_{23}}$:
  - En partant de la gauche des rubans 1 et 2, on parcourt les rubans 1 et 2 vers la droite, bloc par bloc, jusqu'à atteindre la fin du ruban 1, ou ce que l'on lise un bloc #10111# (10111 correspond à 23 en binaire).
  - Si la fin du ruban 1 a été atteinte, on ne fait rien, puisque x_{23} vaut 0 et le ruban 3 contient déjà $\langle x_0 \rangle$.
  - Sinon, c'est que l'on a trouvé #10111# sur le ruban 1. On lit alors $\langle x_{23} \rangle$ sur le ruban 2, que l'on recopie sur le ruban 4.
  - Comme ci-dessus, on parcourt les rubans 1 et 2 en parallèle jusqu'à trouver $\#\langle x_{23} \rangle\#$ où atteindre la fin du ruban 1. Si la fin du ruban 1 est atteinte, alors on écrit 0 sur le ruban 3, puisque $x_{x_{23}} = x_0$.
  - Sinon, on copie le bloc correspondant sur le ruban 1 sur le ruban 3, puisque le bloc sur le ruban 2 contient $x_{x_{23}}$, et on retourne en position standard.

Machines RAM vs Machines de Turing

- Dans une machine RAM, on peut autoriser aussi des instructions du type :
  1. $x_i \leftarrow x_j \ op \ x_k$

  où *op* est une opération (addition, soustraction, ...)

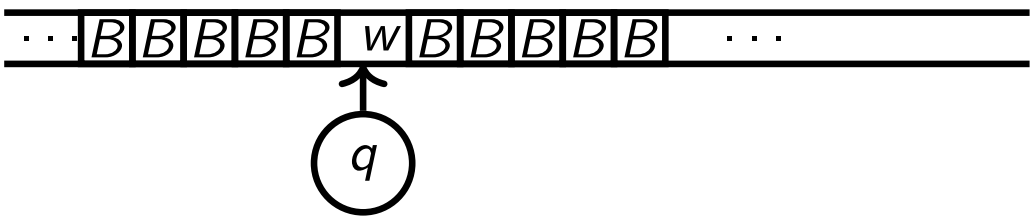
- Avec le même principe :

> **Théorème**
> *Toute machine RAM peut être simulée par une machine de Turing.*

  - (dès que les opérations *op* restent calculables par machine de Turing).

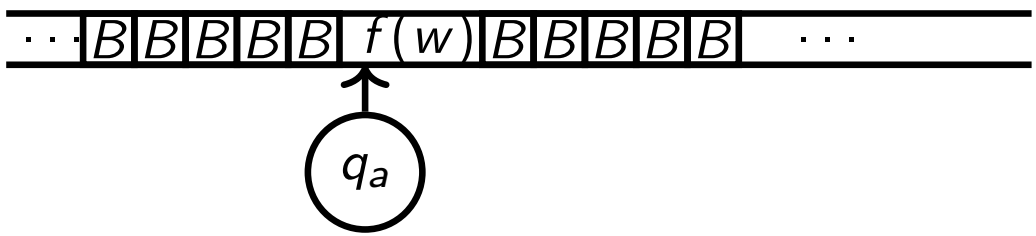
Machines de Turing : calcul de fonctions

- Fonctions sur les mots : $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
  - Une machine de Turing calcule **la fonction** f, si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ la machine s'arrête en acceptant avec son ruban qui contient $f(w)$ (entouré de B)



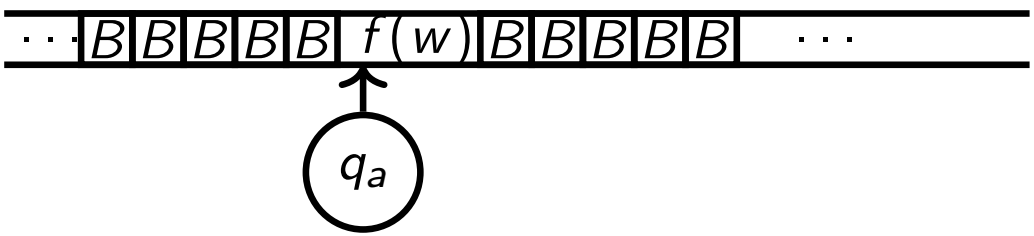
Machines de Turing : calcul de fonctions

- Fonctions sur les mots : $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
  - Une machine de Turing calcule **la fonction** f, si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ la machine s'arrête en acceptant avec son ruban qui contient $f(w)$ (entouré de B)



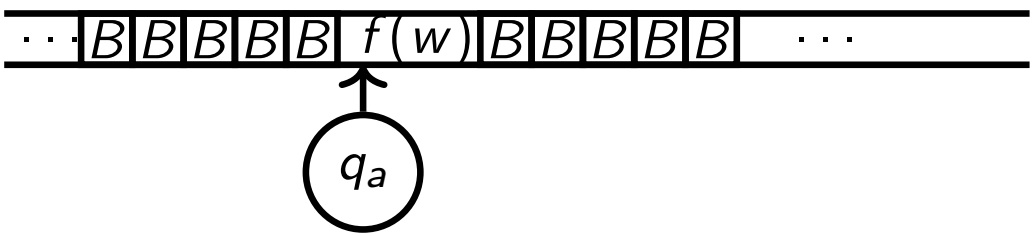
Machines de Turing : calcul de fonctions

- Fonctions sur les mots : $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
  - Une machine de Turing calcule **la fonction partielle** f, si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ la machine s'arrête en acceptant avec son ruban qui contient $f(w)$ (entouré de B) si w est dans le domaine de f, et boucle ou refuse sinon.



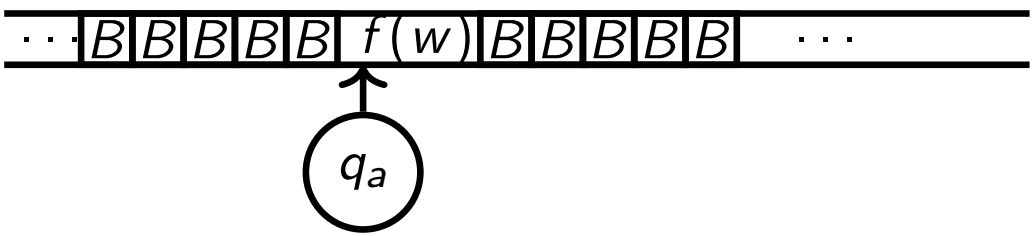
Machines de Turing : calcul de fonctions

- Fonctions sur les mots : $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
  - Une machine de Turing calcule **la fonction partielle** f, si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ la machine s'arrête en acceptant avec son ruban qui contient $f(w)$ (entouré de B) si w est dans le domaine de f, et boucle ou refuse sinon.



Machines de Turing : calcul de fonctions

- Fonctions sur les mots : $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$.
  - Une machine de Turing calcule **la fonction partielle** f, si pour tout mot $w \in \Sigma^*$ la machine s'arrête en acceptant avec son ruban qui contient $f(w)$ (entouré de B) si w est dans le domaine de f, et boucle ou refuse sinon.



- Fonctions $f : E \to F$:
  - on fixe un codage des éléments de E et de F, et on exige que la fonction qui passe du codage de $e \in E$ au codage de $f(e) \in F$ soit calculable.
  - Exemple :
    - On peut coder $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ par $\langle \vec{n} \rangle = a^{n_1+1} b a^{n_2+1} b \cdots a^{n_k+1}$.
    - Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est calculable si elle est calculable sur ce codage.

Thèse de Church

- Thèse de Church :

> Calculable dans un sens intuitif
> correspond à
> calculable par machine de Turing

Thèse de Church

- Thèse de Church :

> Calculable dans un sens intuitif
> correspond à
> calculable par machine de Turing

- Conséquence :
  - on va décrire des algorithmes “haut niveau” dans la suite (en français, JAVA, CAML, PYTHON, etc) ;
  - en utilisant implicitement à chaque fois le fait qu'ils peuvent s'écrire comme des programmes de machines de Turing.

Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

Plus précisément

Machines universelles

Interprètes

Interprètes

- Un langage comme JAVA est interprété :
  - un programme JAVA est compilé en un codage que l'on appelle **bytecode**.
  - Lorsqu'on cherche à lancer ce programme, l'interprète JAVA simule ce bytecode.
- Ce principe d'interprétation permet la portabilité :
  - seul l'interprète dépend de la machine sur laquelle on exécute le programme.

- Avec des machines de Turing, on peut aussi programmer des **interprètes**,
  - c'est-à-dire des programmes qui prennent en entrée la description d'un autre programme et qui simulent l'exécution de ce programme.

- Avec des machines de Turing, on peut aussi programmer des **interprètes**,
  - c'est-à-dire des programmes qui prennent en entrée la description d'un autre programme et qui simulent l'exécution de ce programme.
- Pour le voir,
  - Il nous faut fixer une représentation des programmes des machines de Turing.

Codage d'une machine de Turing

- Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \delta, q_0, q_a, q_r)$: une machine de Turing sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:
  - On peut considérer que $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_z\}$, avec la convention que $q_1 = q_0$, $q_2 = q_a$, $q_3 = q_r$, et que $\Gamma = \{X_1, X_2, \cdots, X_s\}$, avec la convention que X_s est le symbole B, et que X_1 est le symbole 0 de Σ, et que X_2 est le symbole 1 de Σ.
  - Pour $m \in \{\leftarrow, |, \rightarrow\}$, on définit $\langle m \rangle$ par $\langle \leftarrow \rangle = 1$, $\langle \rightarrow \rangle = 2$, $\langle | \rangle = 3$.
  - Supposons que l'une des règles de transition du programme δ soit $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, m)$: le codage de cette règle est le mot $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^{\langle m \rangle}$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

- Un codage, noté $\langle M \rangle$, de la machine de Turing M est un mot de la forme

$$C_1 11 C_2 11 C_3 \cdots C_{n-1} 11 C_n,$$

où chaque C_i est le codage d'une des règles de transition de δ.

Existence d'une machine de Turing universelle

- On peut construire un interprèteur, c'est-à-dire une **machine de Turing universelle** :

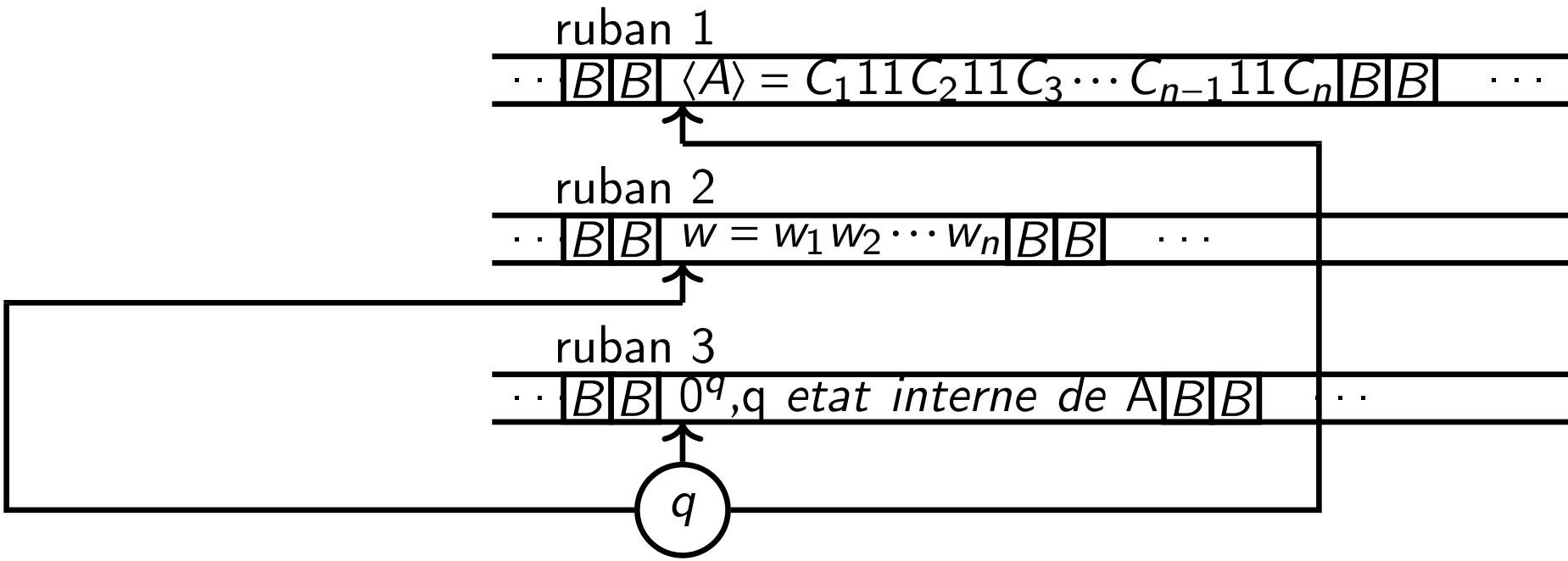
Théorème

Il existe une machine de Turing M_{univ} telle, que sur l'entrée $(\langle M \rangle, w)$ où :

1. *$\langle M \rangle$ est le codage d'une machine de Turing M ;*
2. *$w \in \{0,1\}^*$,*

la machine M_{univ} simule la machine de Turing M sur l'entrée w.

Principe : en autorisant 3 rubans



Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

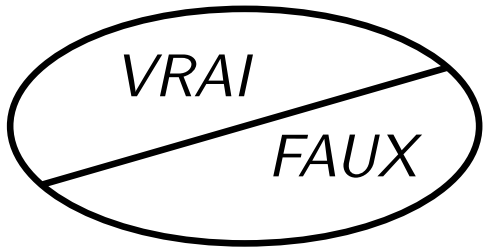
Plus précisément

Langages et problèmes décidables

- Problèmes de décision
- Problèmes décidables

Problèmes de décision

- On va s'intéresser dorénavant presqu'uniquement aux problèmes dont la réponse est soit *vrai* soit *faux*.

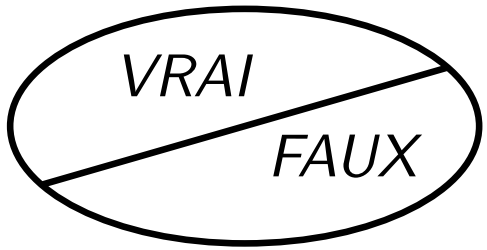


- Un **problème de décision** $\mathscr{P}$ est la donnée
  - d'un ensemble E, **que l'on appelle l'ensemble des instances**,
  - et d'un sous-ensemble E^+ de E, que l'on appelle **l'ensemble des instances positives**.

- La question à laquelle on s'intéresse est de construire (si cela est possible) une machine de Turing qui décide si une instance donnée est positive ou non :

Problèmes de décision

- On va s'intéresser dorénavant presqu'uniquement aux problèmes dont la réponse est soit *vrai* soit *faux*.



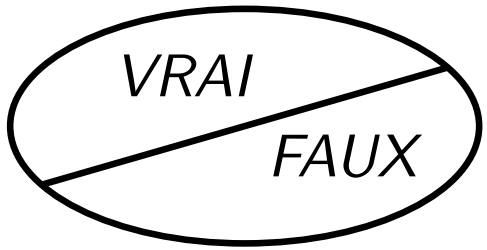
- Un **problème de décision** $\mathscr{P}$ est la donnée
  - d'un ensemble E, **que l'on appelle l'ensemble des instances**,
  - et d'un sous-ensemble E^+ de E, que l'on appelle **l'ensemble des instances positives**.

- La question à laquelle on s'intéresse est de construire (si cela est possible) une machine de Turing qui décide si une instance donnée est positive ou non :

  - c'est-à-dire, qui prend en entrée le codage d'un élément $e \in E$, et qui accepte si $e \in E^+$, et qui refuse si $e \notin E^+$.

Problèmes de décision

- On va s'intéresser dorénavant presqu'uniquement aux problèmes dont la réponse est soit *vrai* soit *faux*.



- Un **problème de décision** $\mathscr{P}$ est la donnée
  - d'un ensemble E, **que l'on appelle l'ensemble des instances**,
  - et d'un sous-ensemble E^+ de E, que l'on appelle **l'ensemble des instances positives**.

- La question à laquelle on s'intéresse est de construire (si cela est possible) une machine de Turing qui décide si une instance donnée est positive ou non :

  - c'est-à-dire, qui prend en entrée le codage d'un élément $e \in E$, et qui accepte si $e \in E^+$, et qui refuse si $e \notin E^+$.
  - notation : on écrira $e \in \mathscr{P}$ pour dire que $e \in E^+$.

Exemples

- Problème NOMBRE PREMIER:

Donnée: Un entier naturel n.
Réponse: Décider si n est premier.

- Problème CODAGE:

Donnée: Un mot w.
Réponse: Décider si w correspond au codage $\langle M \rangle$ d'une certaine machine de Turing M.

- Problème REACH:

Donnée: Un triplet constitué d'un graphe G, d'un sommet u et d'un sommet v du graphe.
Réponse: Décider s'il existe un chemin entre u et v dans le graphe G.

Remarque : problèmes vs langages

- On utilise indifféremment la terminologie problème ou langage,
  - car les deux concepts sont essentiellement les mêmes ;
  - formellement, à un langage correspond un problème (de décision) et réciproquement.

- Problèmes vers langages :
  - en effet, à un problème est associé généralement implicitement un codage : e est représenté par un mot $\langle e \rangle$ sur un alphabet Σ.
  - On peut donc voir E comme $\{w | w = \langle e \rangle, e \in E\}$.
  - Au problème de décision $\mathscr{P}$, correspond le langage $L(\mathscr{P}) = \{w | w = \langle e \rangle, e \in E^+\}$.

- Langages vers problèmes :
  - Réciproquement, on peut voir tout langage L comme le problème de décision :

Donnée: Un mot w.
Réponse: Décider si $w \in L$.

Plus précisément

Langages et problèmes décidables

- Problèmes de décision
- Problèmes décidables

Problèmes décidables

Définition

- *Rappel : Un langage $L \subset M^*$ est dit **décidable** s'il est décidé par une certaine machine de Turing.*
- *Un langage ou un problème décidable est aussi dit **récursif**.*
- *Un langage qui n'est pas décidable est dit **indécidable**.*

- On note D pour la classe des langages et des problèmes **décidables**.

- Par exemple :

  - Proposition. Les problèmes de décision NOMBRE PREMIER, CODAGE et REACH sont décidables.

Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

Plus précisément

Indécidabilité

- Un premier problème indécidable
- Problèmes semi-décidables

Le langage universel

- On appelle **langage universel**, le problème de décision suivant :

  - Problème $\mathsf{L}_{\mathsf{univ}}$:

Donnée: • Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M
• et un mot w.

Réponse: Décider si la machine M accepte le mot w.

Théorème

Le problème $\mathsf{L}_{\mathsf{univ}}$ *n'est pas décidable.*

- Démonstration :
  - Par l'absurde : si L_{univ} est décidé par une machine de Turing A, on peut alors construire une machine de Turing B qui fonctionne de la façon suivante :
    - B prend en entrée un mot $\langle C \rangle$ codant une machine de Turing C ;
    - B appelle la machine de Turing A sur la paire $(\langle C \rangle, \langle C \rangle)$ (c'est-à-dire sur l'entrée constituée du codage de la machine de Turing C, et du mot w correspondant aussi à ce même codage) ;
    - Si la machine de Turing A accepte ce mot, B refuse.
    - Si la machine de Turing A refuse ce mot, B accepte.
  - Appliquons la machine de Turing B sur le mot $\langle B \rangle$, c'est-à-dire sur le mot codant la machine de Turing B :
    - Si B accepte le mot $\langle B \rangle$, cela signifie, par définition de L_{univ} et de A, que A accepte $(\langle B \rangle, \langle B \rangle)$. Mais si A accepte ce mot, B est construit pour refuser son entrée $\langle B \rangle$. Contradiction.
    - Si B refuse le mot $\langle B \rangle$, cela signifie, par définition de L_{univ} et de A, que A refuse $(\langle B \rangle, \langle B \rangle)$. Mais si A refuse ce mot, B est construit pour accepter son entrée $\langle B \rangle$. Contradiction.

Plus précisément

Indécidabilité

- Un premier problème indécidable
- Problèmes semi-décidables

Problèmes semi-décidables

Théorème

Le problème $\mathsf{L}_{\mathsf{univ}}$ *est toutefois semi-décidable :*

- Un langage $L \subset \Sigma^*$ est dit **semi-décidable** (ou encore **récursivement énumérable**) s'il correspond à l'ensemble des mots acceptés par une machine de Turing.
- On note RE la classe des langages et des problèmes semi-décidables.

- Preuve :
  - Sur l'entrée $(\langle M \rangle, w)$, il suffit de simuler la machine de Turing M sur l'entrée w.
    - On arrête la simulation et on accepte si l'on détecte dans cette simulation que la machine de Turing M atteint son état d'acceptation.
    - Sinon, on simule M pour toujours.

Au menu

Objectif de la suite du cours

Thèse de Church

Machines universelles

Langages et problèmes décidables

Indécidabilité

Autres problèmes indécidables

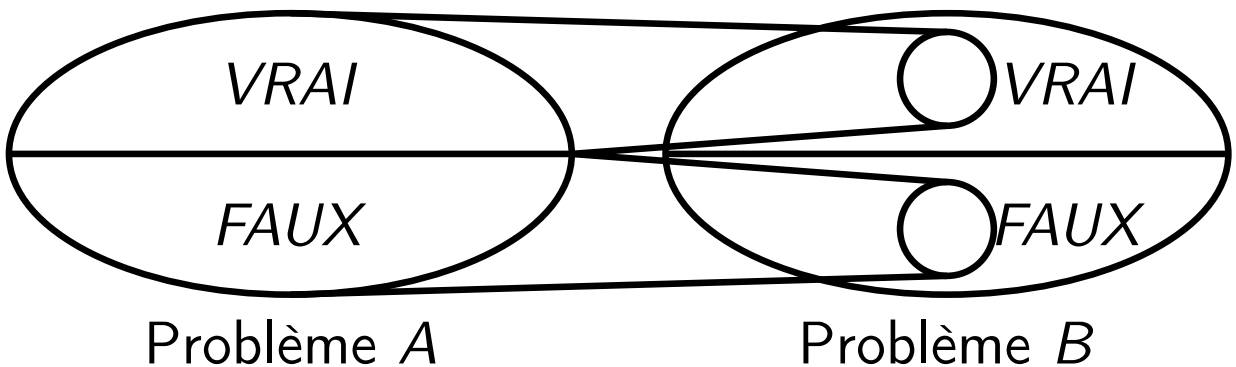
Plus précisément

- Nous connaissons deux langages indécidables,
  - $L_{univ}{}'$ et son complémentaire.
- Notre but est maintenant d'en obtenir d'autres, et de savoir comparer les problèmes.
- Nous introduisons pour cela la notion de **réduction**.

La notion de réduction

- Soient A et B deux problèmes d'alphabets respectifs M_A et M_B. Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : M_A^* \to M_B^*$ calculable telle que

$$w \in A \text{ ssi } f(w) \in B.$$

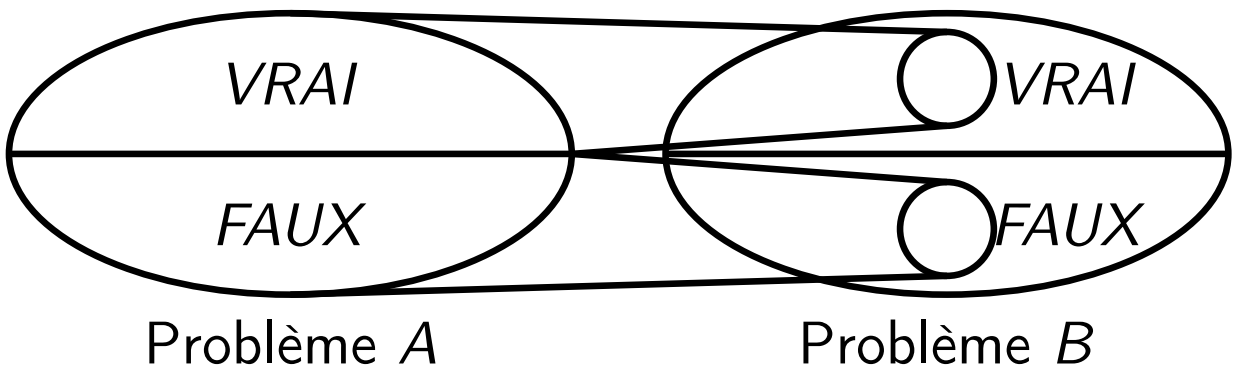


- On note $A \leq_m B$ lorsque A se réduit à B.

La notion de réduction

- Soient A et B deux problèmes d'alphabets respectifs M_A et M_B. Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : M_A^* \to M_B^*$ calculable telle que

$$w \in A \text{ ssi } f(w) \in B.$$



- On note $A \leq_m B$ lorsque A se réduit à B.
  - intuitivement : $A \leq_m B$ signifie que A est plus facile que B.

Principales propriétés

Théorème

$\leq_m$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq_m L$;*
2. *$L_1 \leq_m L_2$, $L_2 \leq_m L_3$ impliquent $L_1 \leq_m L_3$.*

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si B est décidable alors A est décidable

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si A est indécidable, alors B est indécidable.

Principales propriétés

Théorème

$\leq_m$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq_m L$;*
2. *$L_1 \leq_m L_2$, $L_2 \leq_m L_3$ impliquent $L_1 \leq_m L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si B est décidable alors A est décidable

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si A est indécidable, alors B est indécidable.

Principales propriétés

Théorème

$\leq_m$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq_m L$;*
2. *$L_1 \leq_m L_2$, $L_2 \leq_m L_3$ impliquent $L_1 \leq_m L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si B est décidable alors A est décidable

- intuitivement : si un problème est plus facile qu'un problème décidable, alors il est décidable.

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si A est indécidable, alors B est indécidable.

Principales propriétés

Théorème

$\leq_m$ est un préordre (= est reflexive, transitive) :

1. *$L \leq_m L$;*
2. *$L_1 \leq_m L_2$, $L_2 \leq_m L_3$ impliquent $L_1 \leq_m L_3$.*

- intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même, et la relation "être plus facile que" est transitive.

Théorème

Si $A \leq_m B$, et si B est décidable alors A est décidable

- intuitivement : si un problème est plus facile qu'un problème décidable, alors il est décidable.

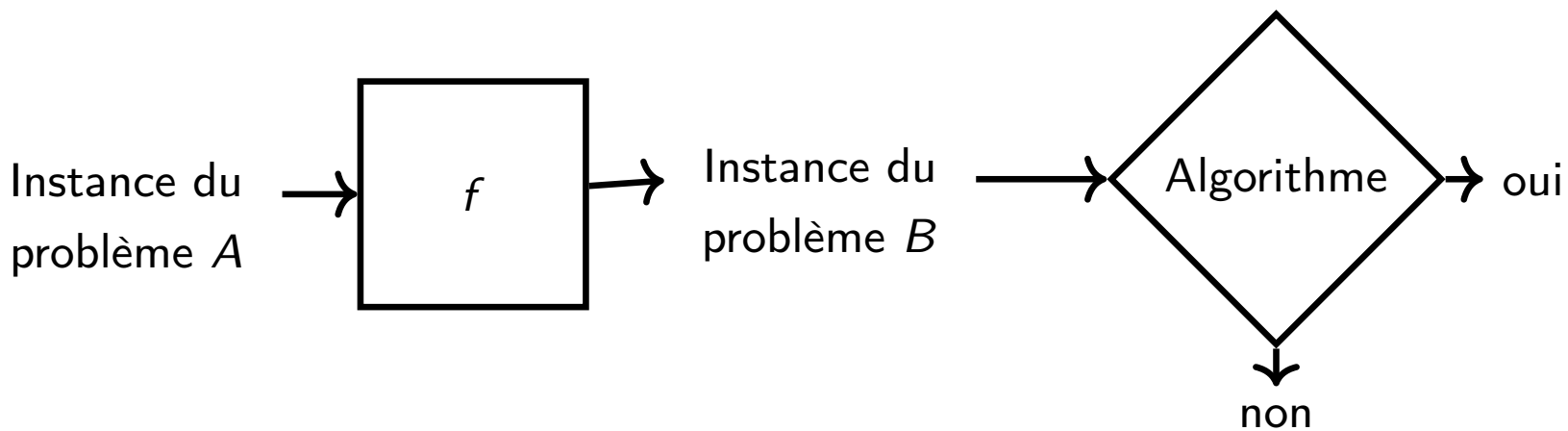
Théorème

Si $A \leq_m B$, et si A est indécidable, alors B est indécidable.

- intuitivement : si un problème est plus difficile qu'un problème indécidable, alors il est indécidable.

- Preuve du premier théorème :
  - Considérer la fonction identité pour f pour le premier point. Pour le second point, supposons $L_1 \leq_m L_2$ via la réduction f, et $L_2 \leq_m L_3$ via la réduction g. On a $x \in L_1$ ssi $g(f(x)) \in L_2$. La composée de deux fonctions calculables est calculable.

- Preuve du second théorème :
  - A est décidé par la machine de Turing qui, sur une entrée w, calcule $f(w)$, puis simule la machine de Turing qui décide B sur l'entrée $f(w)$. Puisqu'on a $w \in A$ si et seulement si $f(w) \in B$, la machine de Turing est correcte.



- Le troisième théorème est la contraposée du second.

Plus précisément

Autres problèmes indécidables

- Réductions
- Quelques autres problèmes indécidables
- Théorème de Rice

- Cette idée permet d'obtenir immédiatement la preuve de l'indécidabilité de plein d'autres problèmes.

- Stratégie :

  - pour prouver que B est indécidable, on prouve que $A \leq_m B$ pour un certain problème A déjà connu comme indécidable.

Exemple 1 : Le problème de l'arrêt des machines de Turing

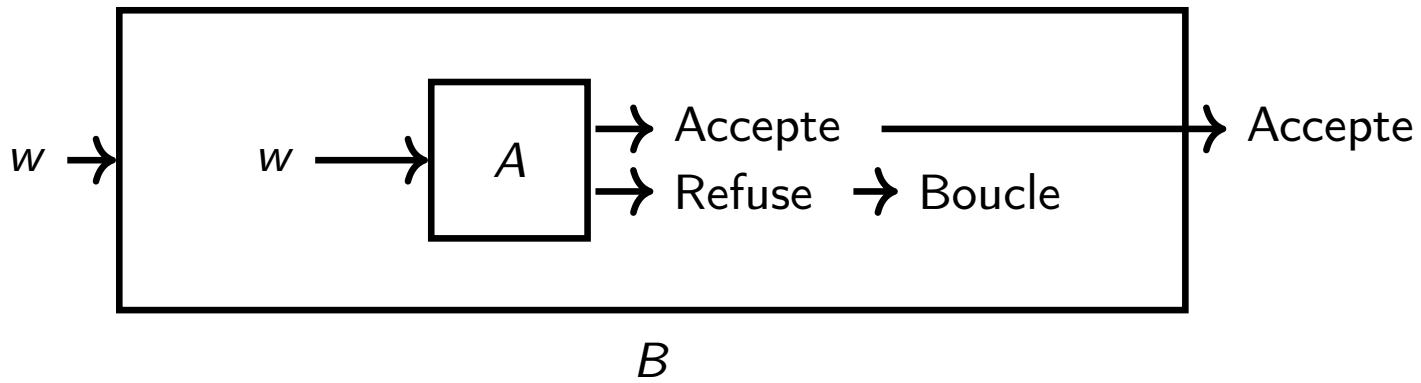
Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing s'arrête.

- Problème HALTING-PROBLEM:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M et une entrée w.
Réponse: Décider si M s'arrête sur l'entrée w.

Proposition Le problème HALTING-PROBLEM est indécidable.

Preuve : $L_{univ} \leq_m$ *HaltingProblem*



- On construit une réduction de L_{univ} vers le problème de l'arrêt : Pour chaque couple $(\langle A \rangle, w)$, on considère la machine de Turing B définie de la façon suivante :
  - B prend en entrée un mot w ;
  - B simule A sur w ;
  - Si A accepte w, alors B accepte. S A rejette w, alors B boucle (possiblement B simule A pour toujours, si A ne s'arrête pas).
- La fonction f qui envoie $(\langle A \rangle, w)$ sur $(\langle B \rangle, w)$ est calculable.
- De plus, on a $(\langle A \rangle, w) \in L_{univ}$ si et seulemnet si B s'arrête sur w, c'est-à-dire $(\langle A \rangle, w) \in$ *Halting Problem*.

Exemple 2

Il n'est pas possible de déterminer algorithmiquement si une machine de Turing accepte au moins une entrée :

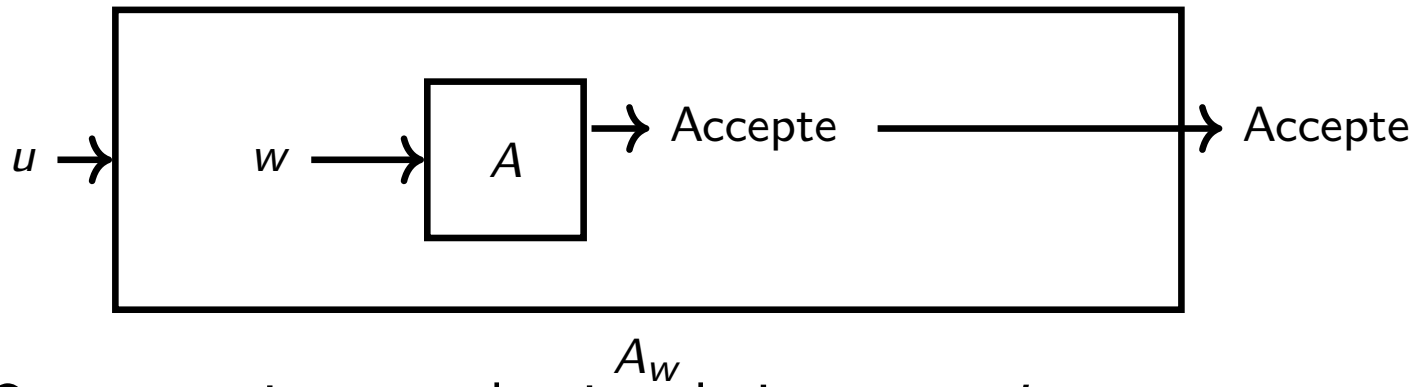
- Problème $L_\emptyset$:

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M.
Réponse: Décider si $L(M) \neq \emptyset$.

Proposition

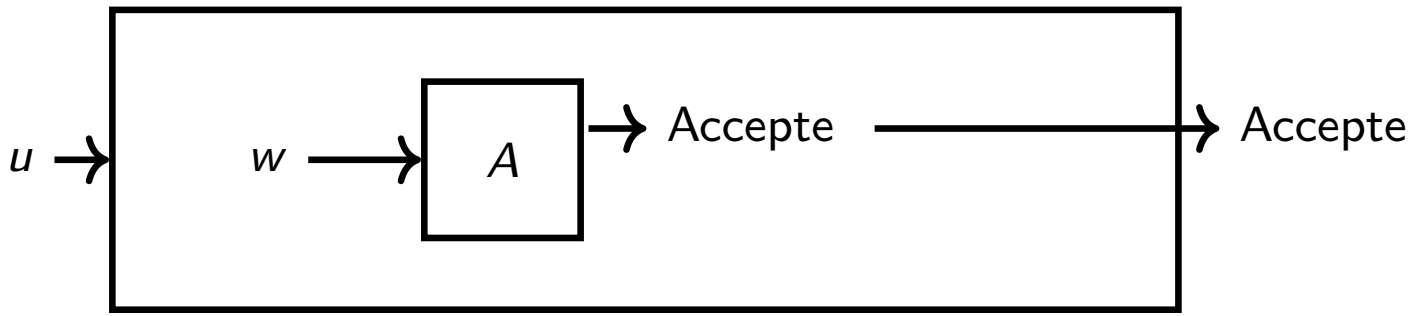
Le problème $L_\emptyset$ est indécidable.

Démonstration



- On construit une réduction de $\mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ vers $L_\emptyset$: pour toute paire $(\langle A\rangle, w)$, on considère la machine de Turing A_w définie de la manière suivante :
  - A_w prend en entrée un mot u ;
  - A_w simule A sur w ;
  - Si A accepte w, alors A_w accepte.
- La fonction f qui à $(\langle A\rangle, w)$ associe $\langle A_w\rangle$ est bien calculable.
- De plus on a $(\langle A\rangle, w) \in \mathrm{L}_{\mathrm{univ}}$ si et seulement si $L(A_w) \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\langle A_w\rangle \in L_\emptyset$:

Démonstration



- On construit une réduction de $\mathrm{L_{univ}}$ vers $L_\emptyset$: pour toute paire $(\langle A \rangle, w)$, on considère la machine de Turing A_w définie de la manière suivante :
  - A_w prend en entrée un mot u ;
  - A_w simule A sur w ;
  - Si A accepte w, alors A_w accepte.
- La fonction f qui à $(\langle A \rangle, w)$ associe $\langle A_w \rangle$ est bien calculable.
- De plus on a $(\langle A \rangle, w) \in \mathrm{L_{univ}}$ si et seulement si $L(A_w) \neq \emptyset$, c'est-à-dire $\langle A_w \rangle \in L_\emptyset$:
  - en effet, A_w accepte soit tous les mots (et donc le langage correspondant n'est pas vide) si A accepte w, soit n'accepte aucun mot (et donc le langage correspondant est vide) sinon.

Plus précisément

Autres problèmes indécidables

- Réductions
- Quelques autres problèmes indécidables
- Théorème de Rice

- Beaucoup d'exemples (dont l'exemple 1) peuvent être vus comme les conséquences d'un résultat très général

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages acceptés par machines de Turing
est indécidable.

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages semi-décidables est indécidable.

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages semi-décidables est indécidable.

- Autrement dit, soit une propriété P des langages semi-décidables non triviale,

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages semi-décidables est indécidable.

- Autrement dit, soit une propriété P des langages semi-décidables non triviale,

- Alors le problème de décision L_P :

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M ;
Réponse: Décider si $L(M)$ vérifie la propriété P ;

est indécidable.

Théorème de Rice

Théorème (Théorème de Rice)

Toute propriété non triviale des langages semi-décidables est indécidable.

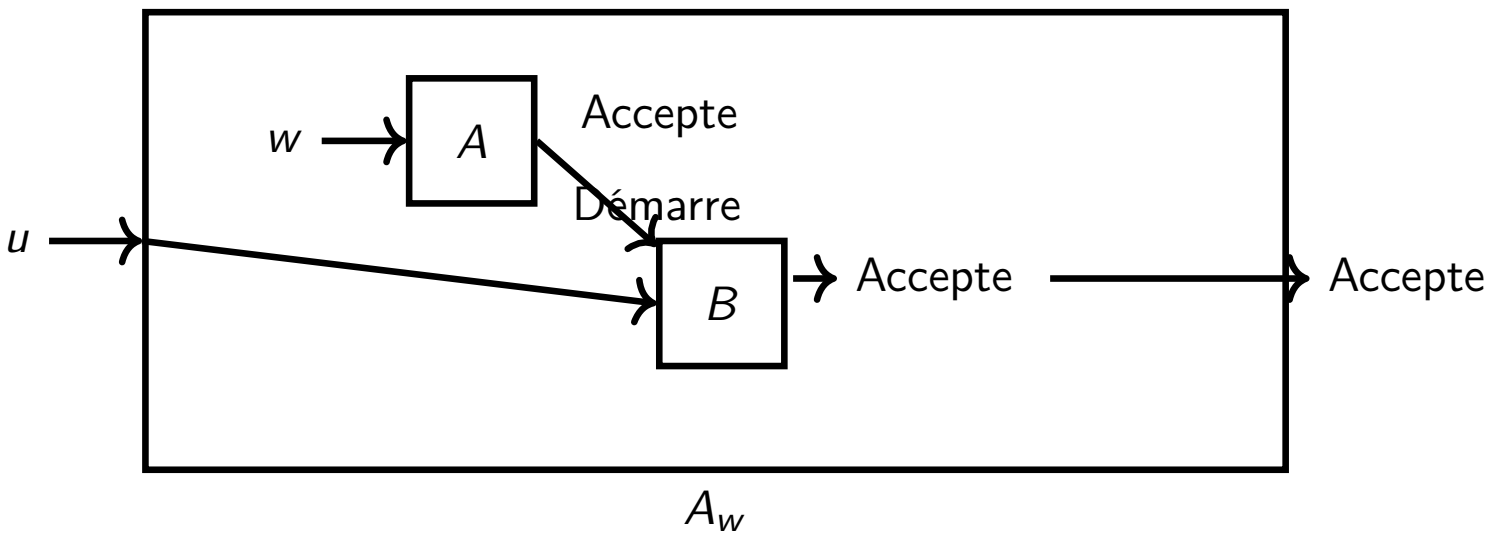
- Autrement dit, soit une propriété P des langages semi-décidables non triviale,
  - c'est-à-dire telle qu'il y a au moins une machine de Turing M telle que $L(M)$ satisfait P et une machine de Turing M telle que $L(M)$ ne satisfait pas P.
- Alors le problème de décision L_P :

Donnée: Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M ;
Réponse: Décider si $L(M)$ vérifie la propriété P ;

est indécidable.

Démonstration graphique

- Il nous faut démontrer que le problème de décision L_P est indécidable.
  - Quitte à remplacer P par sa négation, on peut supposer que le langage vide ne vérifie pas la propriété P.
- Puisque P est non triviale, il existe un moins une machine de Turing B avec $L(B)$ qui vérifie P.



- Démonstration :
  - Il nous faut démontrer que le problème de décision L_P est indécidable.
    - Quitte à remplacer P par sa négation, on peut supposer que le langage vide ne vérifie pas la propriété P (prouver l'indécidabilité de L_p est équivalent à prouver l'indécidabilité de son complémentaire).
  - Puisque P est non triviale, il existe un moins une machine de Turing B avec $L(B)$ qui vérifie P.
  - On construit une réduction de $\mathrm{L_{univ}}$ vers le langage L_P. Étant donnée une paire $(\langle A\rangle, w)$, on considère la machine de Turing A_w définie de la façon suivante :
    - A_w prend en entrée un mot u ;
    - Sur le mot u, A_w simule A sur le mot w ;
    - Si A accepte w, alors A_w simule B sur le mot u : A_w accepte si seulement si B accepte u.
  - Autrement dit, A_w accepte, si et seulement si A accepte w et si B accepte u. Si w est accepté par A, alors $L(A_w)$ vaut $L(B)$, et donc vérifie la propriété P. Si w n'est pas accepté par A, alors $L(A_w) = \emptyset$, et donc ne vérifie pas la propriété P.
  - La fonction f qui à $(\langle A\rangle, w)$ associe $\langle A_w\rangle$ est bien calculable.