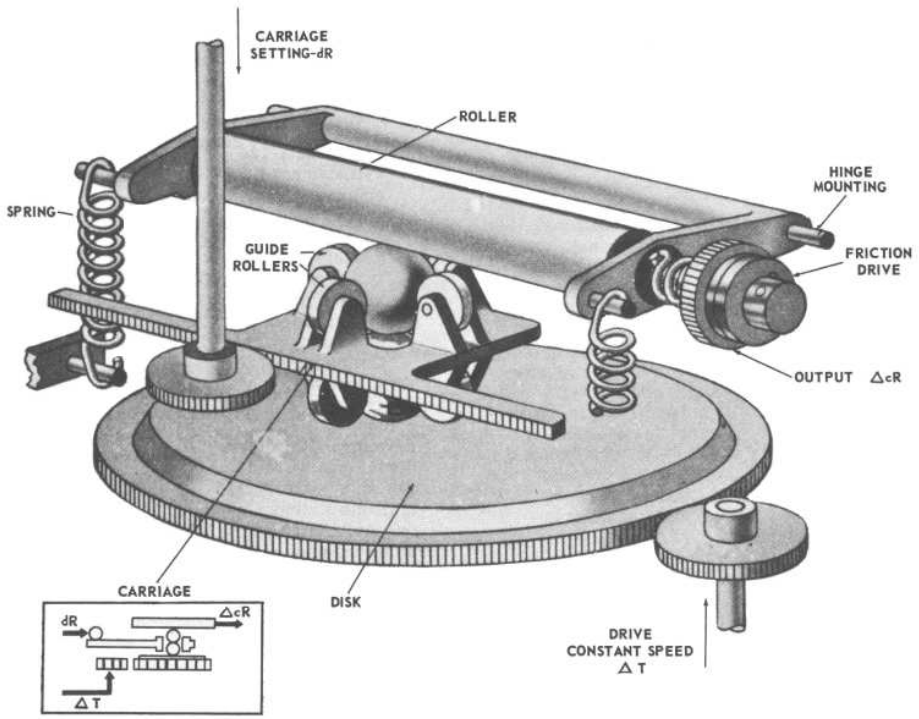
Cours 4: Incomplétude. Machine de Turing.



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
CSC_INF41012_EP

INF412

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

  4: mercredi semaine prochaine: repas avec les délégués.

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Exprimez vous!!

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Séances

  4: mercredi semaine prochaine: repas avec les délégués.
  5: mercredi dans deux semaines: PC notée.

- Exprimez des commentaires, avis sur les cours et les PCs:
  email à bournez@lix.polytechnique.fr, ou
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

Théorème de complétude

- On sait construire un (des) système(s) de déduction qui est valide et complet.
  - Rappel : $\mathscr{T} \vdash F$ pour "F se prouve à partir de $\mathscr{T}$" dans ce système.
  - Notons : $\mathscr{T} \models F$ pour "tout modèle de $\mathscr{T}$ est un modèle de F."
- C'est-à-dire :

Théorème (Validité)

Soit $\mathscr{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
Si $\mathscr{T} \vdash F$ alors $\mathscr{T} \models F$.

Théorème (Complétude)

Soit $\mathscr{T}$ une théorie. Soit F une formule close.
Si $\mathscr{T} \models F$ alors $\mathscr{T} \vdash F$.

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent : complétude

- N'ayons pas peur des répétitions
- Quelques saveurs de la preuve
- Théorème de Löwenheim-Skolem.
- Théorème de Compacité

Autre façon de comprendre ce qu'on obtient :

- prouvabilité et conséquence (sémantique) sont les mêmes notions.

$$\mathscr{T} \vdash F \text{ si et seulement si } \mathscr{T} \models F.$$

Autre façon de le comprendre :

F est prouvable ssi F est vraie dans tous les modèles

Autre façon de le comprendre :

F est prouvable ssi F est vraie dans tous les modèles

- F est prouvable à partir des axiomes $\mathscr{T}$ ssi F est vraie dans tous les modèles de $\mathscr{T}$.

Autre façon de le comprendre :

F est prouvable ssi F est vraie dans tous les modèles

- F est prouvable à partir des axiomes $\mathscr{T}$ ssi F est vraie dans tous les modèles de $\mathscr{T}$.
- Applications : graphes, groupes, corps, ...

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent : complétude

- N'ayons pas peur des répétitions
- Quelques saveurs de la preuve
- Théorème de Löwenheim-Skolem.
- Théorème de Compacité

Comment est-ce possible ?

- 3 formulations équivalentes du théorème de Complétude.

  1. Pour toute formule F, $\mathscr{T} \models F$ implique $\mathscr{T} \vdash F$.

  2. Pour toute formule F, F n'est pas prouvable à partir de $\mathscr{T}$ implique que $\mathscr{T} \cup \{\neg F\}$ possède un modèle.

  3. **Si $\mathscr{T}$ est cohérente, alors $\mathscr{T}$ possède un modèle.**

Comment est-ce possible ?

- 3 formulations équivalentes du théorème de Complétude.

  1. Pour toute formule F, $\mathscr{T} \models F$ implique $\mathscr{T} \vdash F$.

  2. Pour toute formule F, F n'est pas prouvable à partir de $\mathscr{T}$ implique que $\mathscr{T} \cup \{\neg F\}$ possède un modèle.

  3. **Si $\mathscr{T}$ est cohérente, alors $\mathscr{T}$ possède un modèle.**

- (autrement dit : puisque consistant implique cohérent, cohérence et consistance sont des synonymes).

Comment est-ce possible ?

- Tour de la force de la preuve :
  - On prouve 3. : **Si $\mathscr{T}$ est cohérente, alors $\mathscr{T}$ possède un modèle.**
  - Tour de force et idée de la preuve : construire un modèle
    - Son ensemble de base (domaine) est l'ensemble M des termes clos sur la signature Σ de la théorie.
    - Et la preuve "construit" une façon d'intérpréter les relations pour que cela soit bien un modèle.

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent : complétude

- N'ayons pas peur des répétitions
- Quelques saveurs de la preuve
- Théorème de Löwenheim-Skolem.
- Théorème de Compacité

Théorème (Löwenheim-Skolem)

Si $\mathscr{T}$ une théorie sur une signature dénombrable possède un modèle, alors elle possède un modèle dont l'ensemble de base est dénombrable.

- Du coup, être cohérent est un synonyme d'être consistant.
- Et comme ce que l'on construit dans la preuve est un modèle qui reste dénombrable (= son ensemble de base est dénombrable) si la signature l'est :

Théorème (Löwenheim-Skolem)

Si $\mathscr{T}$ une théorie sur une signature dénombrable possède un modèle, alors elle possède un modèle dont l'ensemble de base est dénombrable.

Corps réels clos

- Application du théorème de Löwenheim-Skolem :
  - il existe des corps réels clos dénombrables.

Corps réels clos

- Application du théorème de Löwenheim-Skolem :
  - il existe des corps réels clos dénombrables.
    - (exemple : les réels algébriques $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$).

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent : complétude

- N'ayons pas peur des répétitions
- Quelques saveurs de la preuve
- Théorème de Löwenheim-Skolem.
- Théorème de Compacité

Théorème (Compacité)

- *Soit $\mathscr{T}$ une théorie.*
- *$\mathscr{T}$ possède un modèle si et seulement si toute partie finie de $\mathscr{T}$ possède un modèle.*

- Une preuve fait intervenir un nombre fini d'axiomes.
- Et donc :

Théorème (Compacité)

- *Soit $\mathscr{T}$ une théorie.*
- *Une formule F est une conséquence de $\mathscr{T}$ si et seulement si F est une conséquence d'une partie finie de $\mathscr{T}$.*
- *$\mathscr{T}$ possède un modèle si et seulement si toute partie finie de $\mathscr{T}$ possède un modèle.*

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

Plus précisément

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

- Arithmétique de Peano : première tentative
- Arithmétique de Peano

Axiomes de l'arithmétique

- Considérons une signature constituée du symbole de constante 0, d'une fonction unaire s, et de deux fonctions binaires $+$ et $*$, et de la relation binaire $=$.

- On souhaite que $(\mathbb{N}, 0, s, +, *, =)$ en soit un modèle.

1ère tentative

- On considère les axiomes

$$\forall x\ \neg s(x) = 0 \tag{1}$$
$$\forall x \forall y\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) \tag{2}$$
$$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ s(y) = x) \tag{3}$$
$$\forall x\ 0 + x = x \tag{4}$$
$$\forall x\ s(x) + y = s(x + y) \tag{5}$$
$$\forall x\ 0 * x = 0 \tag{6}$$
$$\forall x\ s(x) * y = x * y + y \tag{7}$$

Conséquence/Non-conséquence

- Rappel : une formule F est dite une **conséquence** d'un ensemble de formules $\mathscr{T}$ si tout modèle de la théorie $\mathscr{T}$ est un modèle de F.
  - se note : $\mathscr{T} \models F$

Conséquence/Non-conséquence

- Rappel : une formule F est dite une **conséquence** d'un ensemble de formules $\mathscr{T}$ si tout modèle de la théorie $\mathscr{T}$ est un modèle de F.
  - se note : $\mathscr{T} \models F$
- Comment se persuader qu'une formule close n'est pas une conséquence de $\mathscr{T}$?

Conséquence/Non-conséquence

- Rappel : une formule F est dite une **conséquence** d'un ensemble de formules $\mathscr{T}$ si tout modèle de la théorie $\mathscr{T}$ est un modèle de F.
  - se note : $\mathscr{T} \models F$
- Comment se persuader qu'une formule close n'est pas une conséquence de $\mathscr{T}$?
  - en exhibant un modèle de $\mathscr{T}$ qui n'est pas un modèle de F.

Faits

- Pour chaque entier n et m, la formule

$$s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0),$$

est une conséquence des axiomes précédents, où $s^n(0)$ est $s(s(\cdots s(0)))$ avec s répété n fois.

Faits

- Pour chaque entier n et m, la formule

$$s^n(0) + s^m(0) = s^{n+m}(0),$$

est une conséquence des axiomes précédents, où $s^n(0)$ est $s(s(\cdots s(0)))$ avec s répété n fois.

- Mais

$$\forall x \forall y \; x + y = y + x$$

n'est pas une conséquence de ces axiomes.

Un modèle où l'addition n'est pas commutative

- Soit X un ensemble avec au moins deux éléments.
- On considère la structure $\mathfrak{M}$ dont l'ensemble de base est

$$M = \mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z}),$$

et où les symboles $s, +, *, =$ sont interprétés par les conditions suivantes :

  - $=$ est interprété par l'égalité. $s, +, *$ étendent les fonctions correspondantes sur $\mathbb{N}$;
  - pour $a = (x, n)$:
    - $s(a) = (x, n+1)$;
    - $a + m = m + a = (x, n+m)$;
    - $a * m = (x, n * m)$ si $m \neq 0$, et $(x, n) * 0 = 0$;
    - $m * a = (x, m * n)$;
  - pour $a = (x, n)$ et $b = (y, m)$:
    - $(x, n) + (y, m) = (x, n+m)$;
    - $(x, n) * (y, m) = (x, n * m)$.

- Ce modèle est un modèle des axiomes précédents.
- L'addition n'y est pas commutative.

Plus précisément

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

- Arithmétique de Peano : première tentative
- Arithmétique de Peano

Idée des axiomes de Peano

- ajouter une famille (un schéma) d'axiomes pour permettre les preuves par récurrence.

- cette fois l'addition sera bien nécessairement commutative, i.e.

$$\forall x \forall y \; x + y = y + x$$

  sera bien toujours satisfaite.

  - et on capture en pratique toutes les propriétés de l'arithmétique.

Axiomes de Peano

- Les axiomes de l'arithmétique de Peano sont :
  - les axiomes

$$\forall x\ \neg s(x) = 0 \tag{8}$$
$$\forall x \forall y\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) \tag{9}$$
$$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ s(y) = x) \tag{10}$$
$$\forall x\ 0 + x = x \tag{11}$$
$$\forall x\ s(x) + y = s(x + y) \tag{12}$$
$$\forall x\ 0 * x = 0 \tag{13}$$
$$\forall x\ s(x) * y = x * y + y \tag{14}$$

  - et l'ensemble de toutes les formules de la forme

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \Big(\big(F(0, x_1, \cdots, x_n) \wedge \forall x_0 \quad (F(x_0, x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow F(s(x_0), x_1, \cdots, x_n)) \big) \Rightarrow \forall x_0 F(x_0, x_1, \cdots, x_n) \Big)$$

où n est n'importe quel entier et $F(x_0, \cdots, x_n)$ est n'importe quelle formule de variables libres $x_0, \cdots, x_n$.

Axiomes de Peano

- Les axiomes de l'arithmétique de Peano sont :
  - les axiomes + ceux de l'égalité ;

$$\forall x\ \neg s(x) = 0 \tag{8}$$
$$\forall x \forall y\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) \tag{9}$$
$$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ s(y) = x) \tag{10}$$
$$\forall x\ 0 + x = x \tag{11}$$
$$\forall x\ s(x) + y = s(x + y) \tag{12}$$
$$\forall x\ 0 * x = 0 \tag{13}$$
$$\forall x\ s(x) * y = x * y + y \tag{14}$$

  - et l'ensemble de toutes les formules de la forme
$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \Big(\big(F(0, x_1, \cdots, x_n) \wedge \forall x_0 \quad (F(x_0, x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow F(s(x_0), x_1, \cdots, x_n)) \big) \Rightarrow \forall x_0 F(x_0, x_1, \cdots, x_n) \Big)$$
où n est n'importe quel entier et $F(x_0, \cdots, x_n)$ est n'importe quelle formule de variables libres $x_0, \cdots, x_n$.

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

- On note $Th(\mathbb{N})$ l'ensemble des formules closes F qui sont vraies sur les entiers.

Théorème (Incomplétude)

Il existe des formules closes de $Th(\mathbb{N})$ qui ne sont pas prouvables, à partir des axiomes de Peano, ou de toute axiomatisation "raisonnable"[1] des entiers.

Théorème (Second théorème d'incomplétude)

La cohérence de l'arithmétique (ou sa négation) est un exemple de telle formule.

1. Formellement, "récursivement énumérable" : voir suite du cours.

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

Entiers non-standards

- Il y a d'autres modèles que $\mathbb{N}$ des axiomes de Peano.
  - il existe des modèles **non-standards** de l'arithmétique.

Entiers non-standards

- Il y a d'autres modèles que $\mathbb{N}$ des axiomes de Peano :
  - considérons un nouveau symbole de constante c.
  - considérons $\mathscr{T}$ défini comme l'union des axiomes de Peano et de toutes les formules $\neg c = s^n(0)$, pour n un entier.
  - Tout sous-ensemble fini de $\mathscr{T}$ admet un modèle, car il est inclus dans l'union des axiomes de Peano et des formules $\neg c = s^n(0)$ pour $1 \leq n \leq N$ pour un certain entier N :
    - il suffit d'interpréter c par $N+1$.
  - Donc $\mathscr{T}$ admet un modèle.
- Ce modèle contient donc un élément qui n'est pas un entier standard.

⋮

Analyse non-standard

⋮

. . .f est continue si et seulement si pour tout y infiniment petit et pour tout réel x standard, $f(x+y)-f(x)$ est infiniment petit . . .

⋮

Deux autres utilisations de la logique

- Comment prouver qu'un axiome F est "indépendant" d'une théorie $\mathscr{T}$?
  - On utilise un modèle de $\mathscr{T}$ pour construire un modèle de $\mathscr{T} \cup \{F\}$, et un modèle de $\mathscr{T} \cup \{\neg F\}$.
  - On prouve en fait la **cohérence relative** : si $\mathscr{T}$ cohérent, alors $\mathscr{T} \cup \{F\}$ cohérent.
- Définissabilité :
  - On se donne un graphe (i.e. modèle d'une théorie sur une signature contenant un symbole de relation R binaire).
  - Peut-on définir :
    - la relation "être accessible en deux coups" par une formule ?
    - la relation "être accessible par un chemin" (i.e. dans la même composante connexe) ?
  - . . .applications aux requêtes dans les bases de données . . .

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

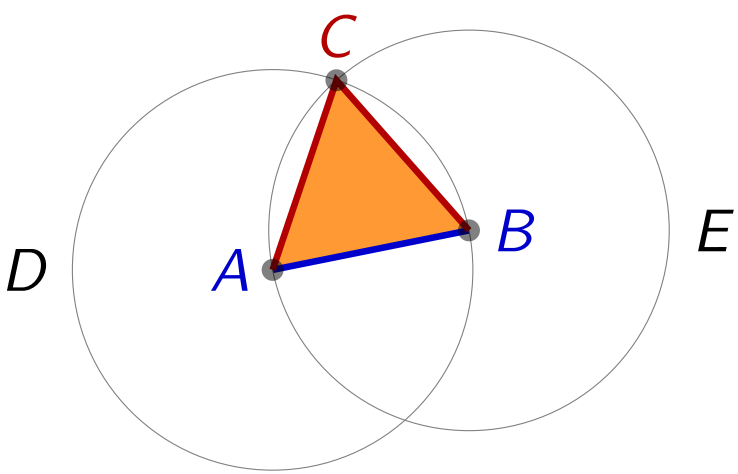
Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

Objectif

- Objectif de ce cours : répondre à la question suivante :

> Qu'est-ce qu'un algorithme ?



Exemple d'algorithme :

Pour construire un triangle équilatéral ayant pour coté AB : tracer le cercle de centre A de rayon AB ; tracer le cercle de centre B de rayon AB. Nommer C l'une des intersections de ces deux cercles. Le triangle ABC est la solution recherchée.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,

- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

Thèse de Church

- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
  - ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.

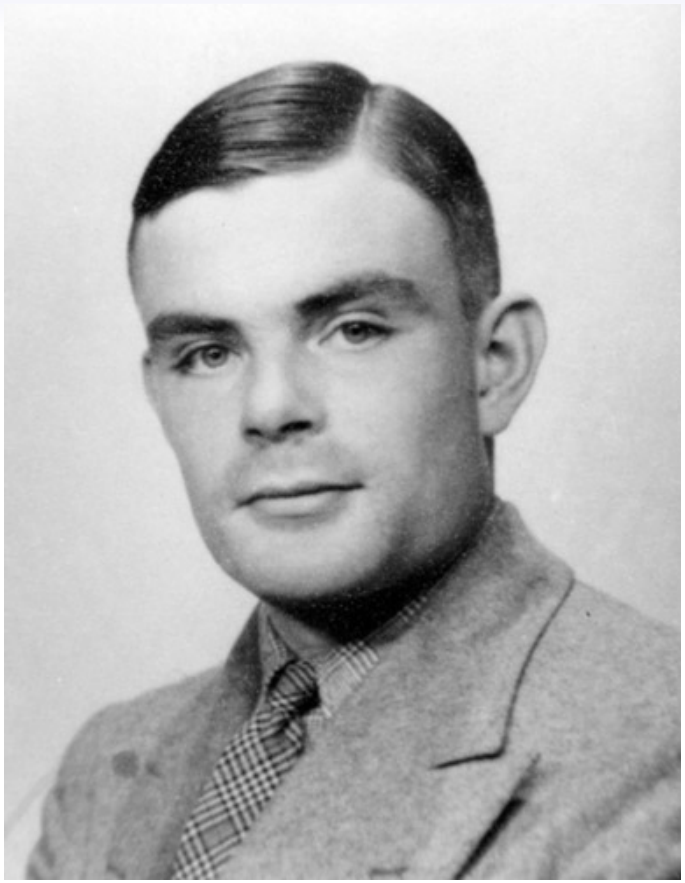
Thèse de Church

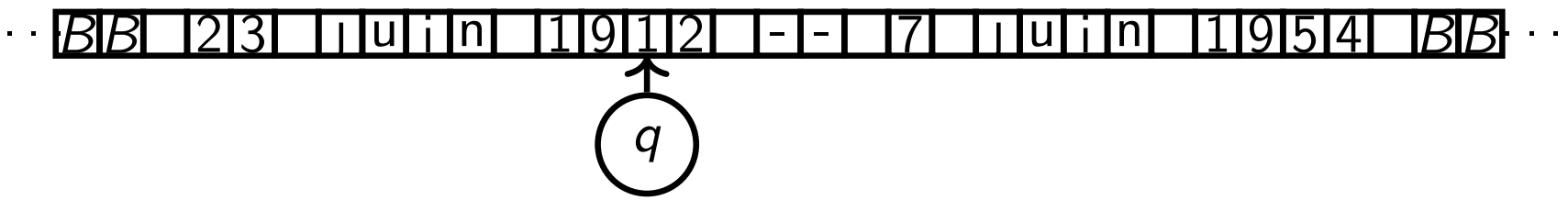
- Historiquement, plusieurs modèles :
  - Fonctions récursives, Kurt Gödel, 1931-34.
  - λ-calcul, Alonzo Church, 1936.
  - Machines de Turing, Alan Turing, 1936.
  - Systèmes de Post,
  - Machines RAM,
  - Programmes JAVA, C, CAML, ...
  - ...
- Il s'avère que ces modèles, très différents, ont exactement la même puissance
  - **Thèse de Church/Turing** : une fonction est *calculable* si et seulement si elle est calculable par machine de Turing.
    - (exprimée clairement pour la première fois par Stephen Kleene, étudiant en thèse d'Alonzo Church.)

Parenthèse historique

- Théorie de la relativité : 1907/1915
- Théorème d'incomplétude : 1931

Alan M. Turing





- Machines de Turing : 1936

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :
- Et en fait de la question suivante "*Entscheidungsproblem*" :

> Peut-on décider mécaniquement
> si un énoncé est démontrable ou non ?

Parenthèse historique

- Ces modèles sont nés des suites du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel :
- Et en fait de la question suivante "*Entscheidungsproblem*" :

> Peut-on décider mécaniquement
> si un énoncé est démontrable ou non ?

- Il s'avère que préciser "mécaniquement", c'est formaliser la notion d'algorithme.

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

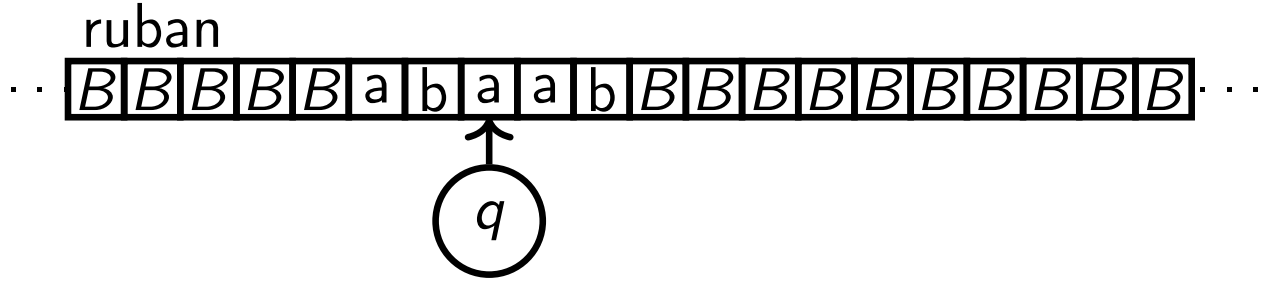
Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

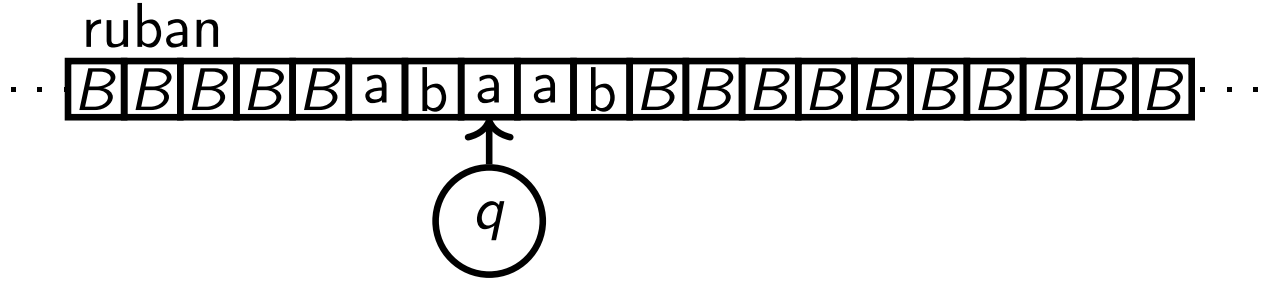
Plus précisément

Machine de Turing



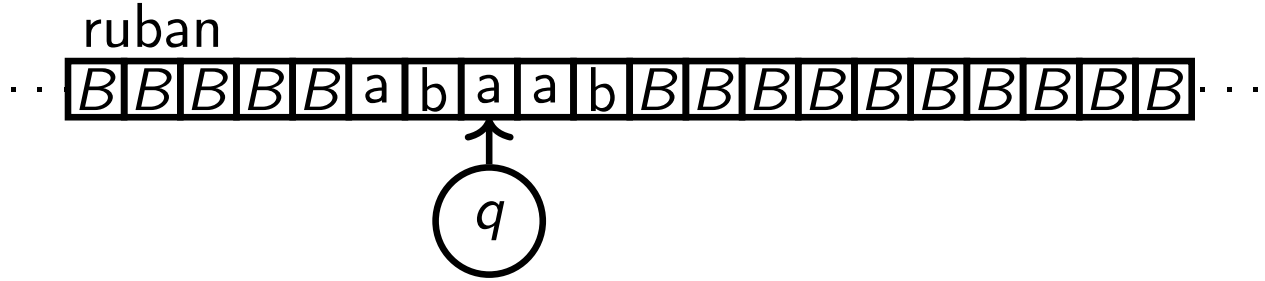
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :

Machine de Turing



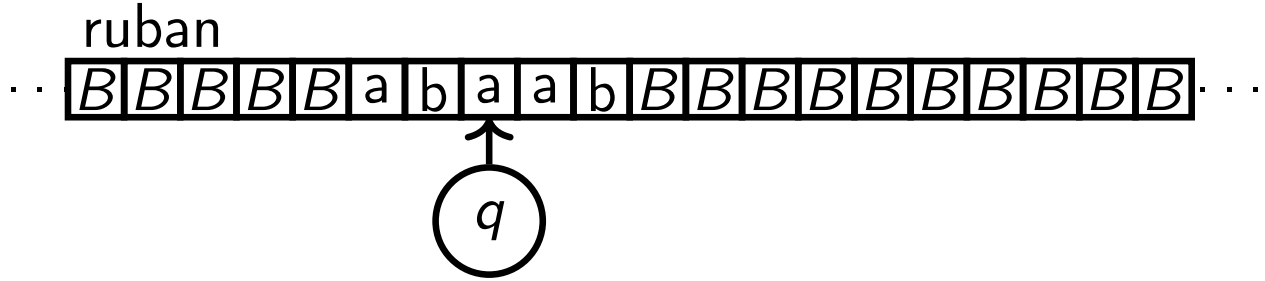
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;

Machine de Turing



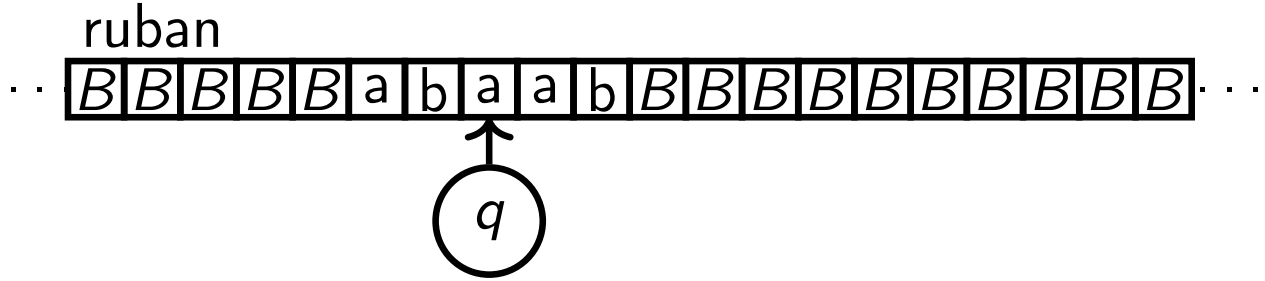
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;

Machine de Turing



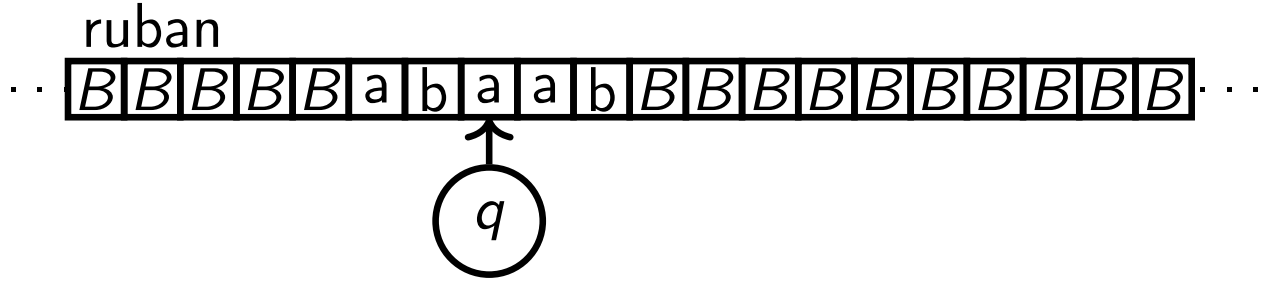
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;
  - une tête de lecture qui se déplace sur le ruban ;

Machine de Turing



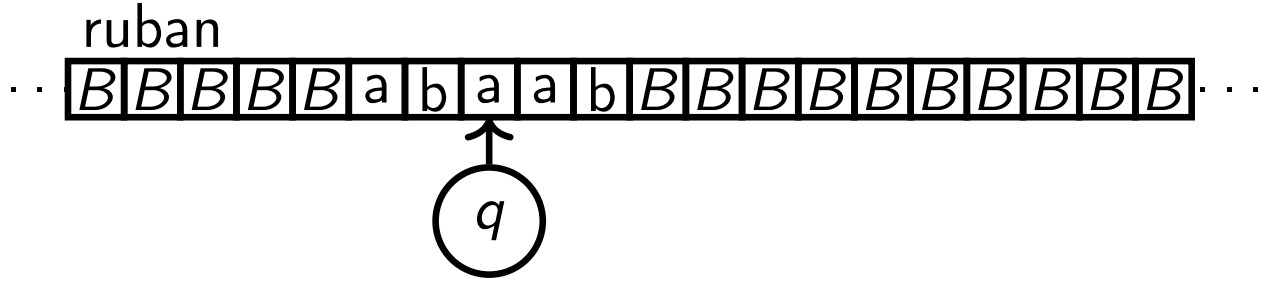
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;
  - une tête de lecture qui se déplace sur le ruban ;
  - un programme donné par une **fonction de transition** qui pour chaque état de la machine q, parmi un nombre fini d'états possibles Q, précise selon le symbole sous la tête de lecture :

Machine de Turing



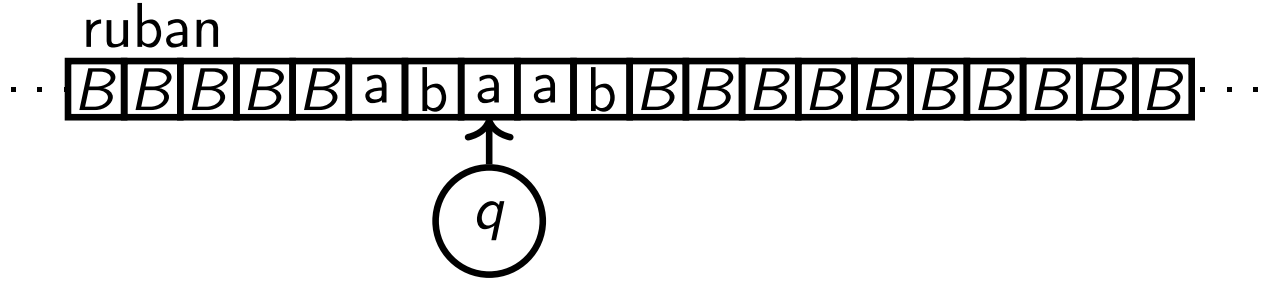
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;
  - une tête de lecture qui se déplace sur le ruban ;
  - un programme donné par une **fonction de transition** qui pour chaque état de la machine q, parmi un nombre fini d'états possibles Q, précise selon le symbole sous la tête de lecture :
    1. l'état suivant $q' \in Q$;

Machine de Turing



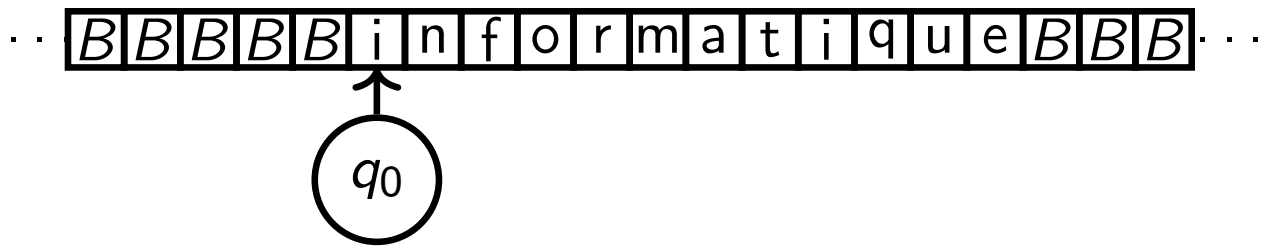
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;
  - une tête de lecture qui se déplace sur le ruban ;
  - un programme donné par une **fonction de transition** qui pour chaque état de la machine q, parmi un nombre fini d'états possibles Q, précise selon le symbole sous la tête de lecture :
    1. l'état suivant $q' \in Q$;
    2. le nouvel élément de Σ à écrire à la place de l'élément de Σ sous la tête de lecture ;

Machine de Turing



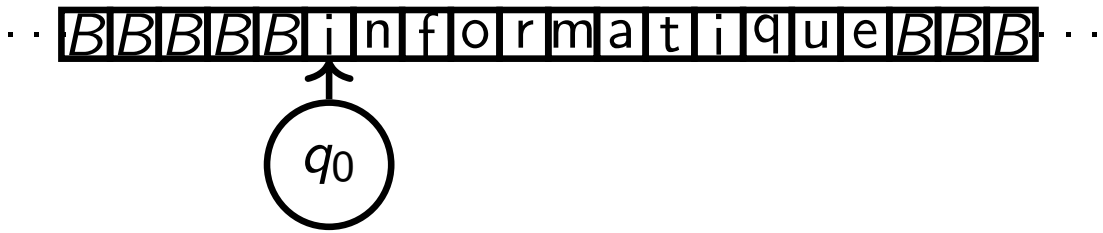
- Une machine de Turing (déterministe) est composée des éléments suivants :
  - une mémoire infinie sous forme de ruban, divisé en cases ;
  - chaque case peut contenir un élément d'un alphabet fini fixé ;
  - une tête de lecture qui se déplace sur le ruban ;
  - un programme donné par une **fonction de transition** qui pour chaque état de la machine q, parmi un nombre fini d'états possibles Q, précise selon le symbole sous la tête de lecture :
    1. l'état suivant $q' \in Q$;
    2. le nouvel élément de Σ à écrire à la place de l'élément de Σ sous la tête de lecture ;
    3. un sens de déplacement $\leftarrow$, $|$, ou $\rightarrow$ pour la tête de lecture.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configuration initiale



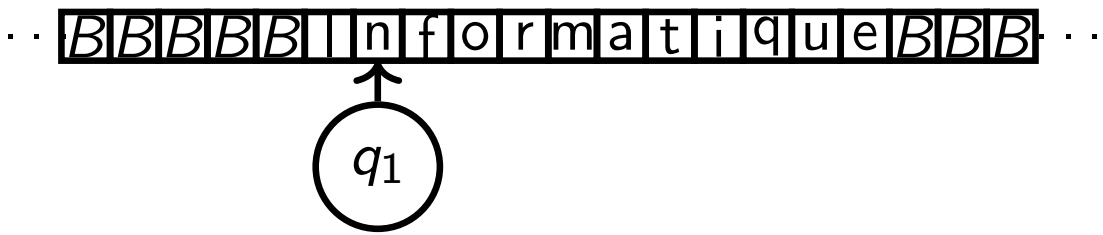
- Initialement :
  - l'entrée se trouve sur le ruban, et la tête de lecture est positionnée sur la première lettre du mot.
  - Les cases des rubans qui ne correspondent pas à l'entrée contiennent toutes l'élément B (symbole de blanc), qui est une lettre particulière.
  - La machine est positionnée dans son état initial q_0.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



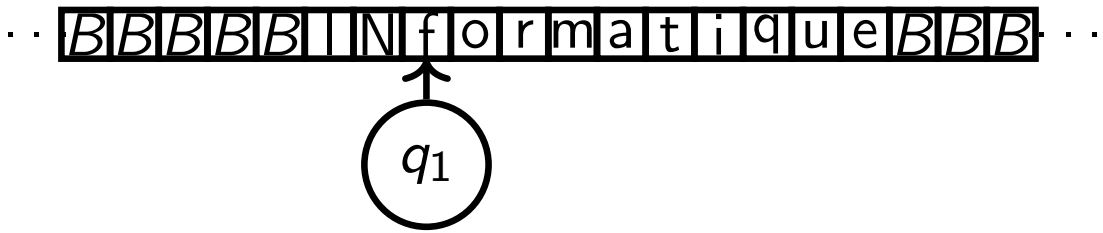
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



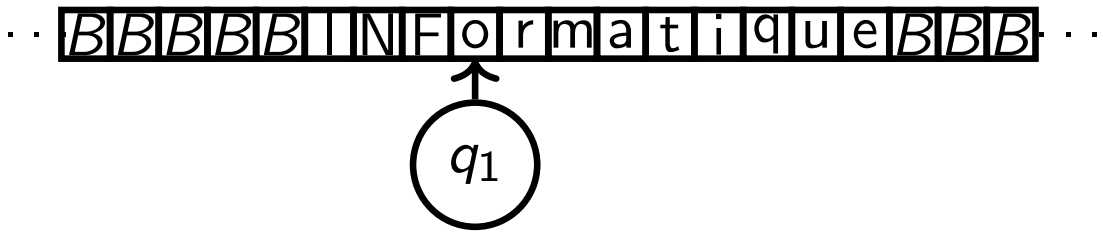
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



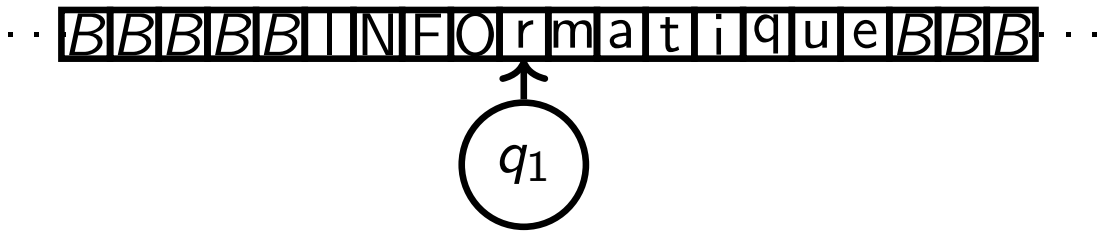
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



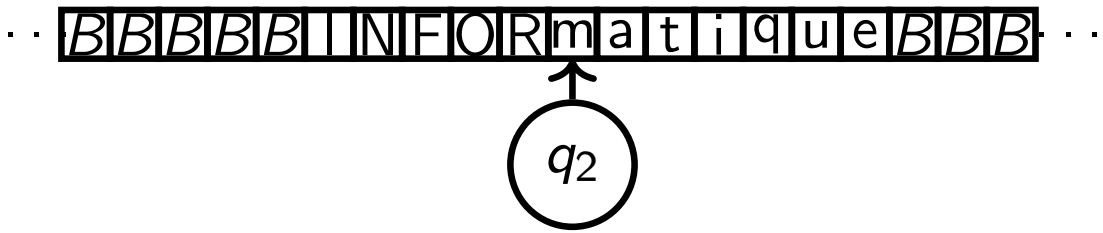
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



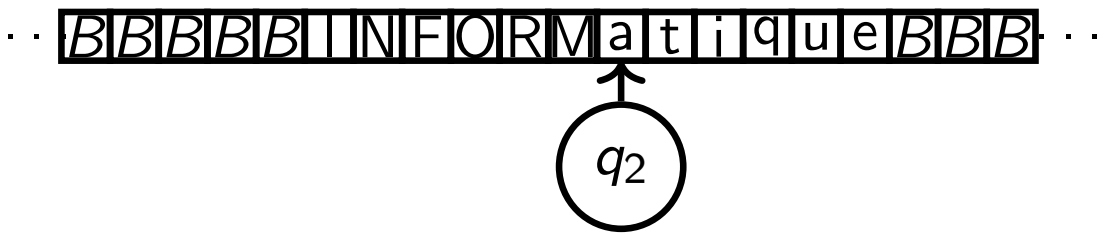
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



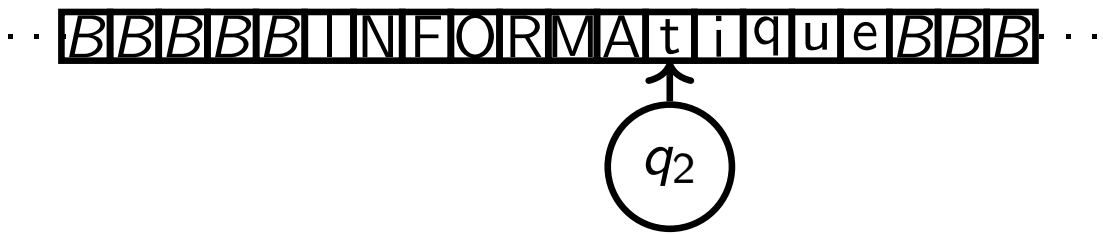
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



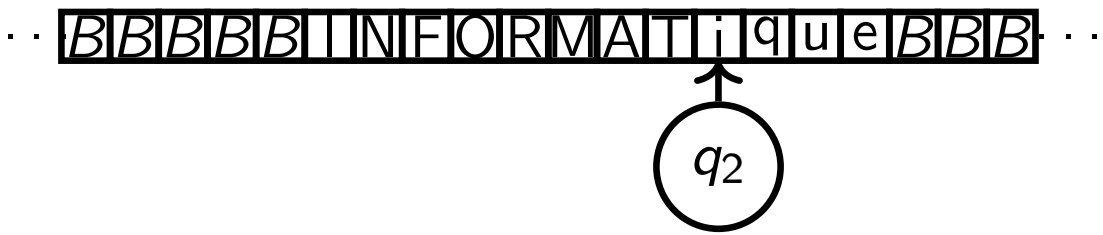
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



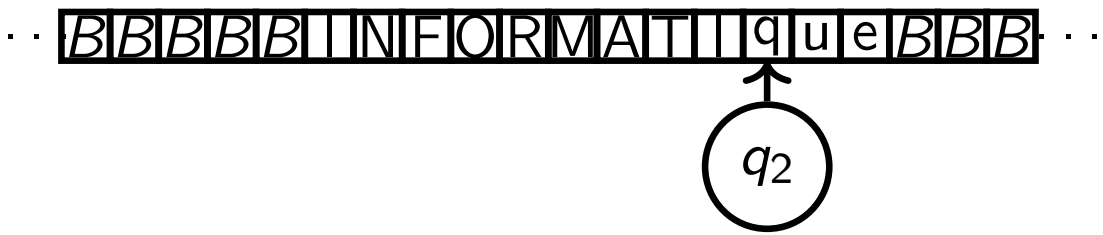
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



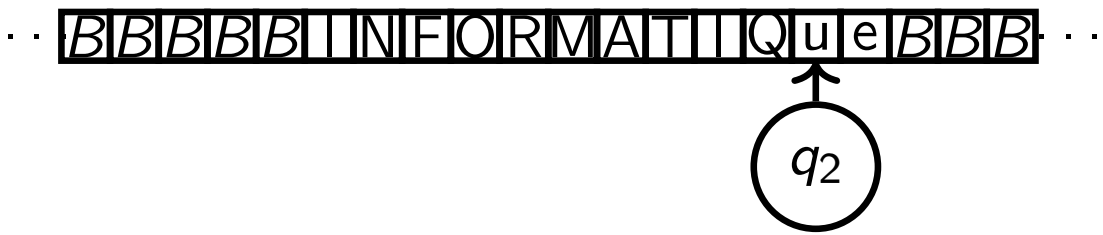
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



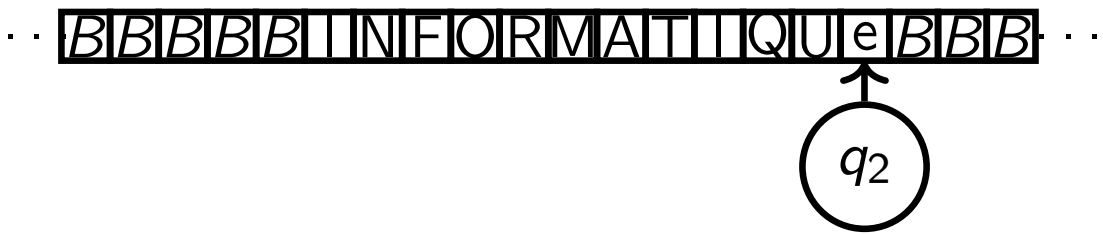
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



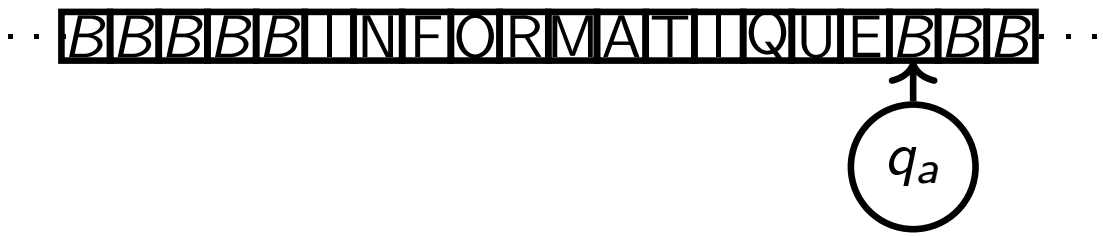
- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Exécution d'une machine de Turing sur un mot : configurations suivantes



- A chaque étape de l'exécution :
  - la machine, selon son état, lit le symbole se trouvant sous la tête de lecture, et selon ce symbole :
    - remplace le symbole sous la tête de lecture par celui précisé par sa fonction transition ;
    - déplace possiblement cette tête de lecture d'une case vers la droite ou vers la gauche suivant le sens précisé par la fonction de transition ;
    - change d'état vers l'état suivant.
- Le mot w est dit accepté lorsque l'exécution de la machine finit par atteindre son état d'acceptation q_a.

Plus précisément

Machines de Turing

- Ingrédients
- Description formelle
- Programmer avec des machines de Turing

Machine de Turing

- **Une machine de Turing** est un 8-uplet

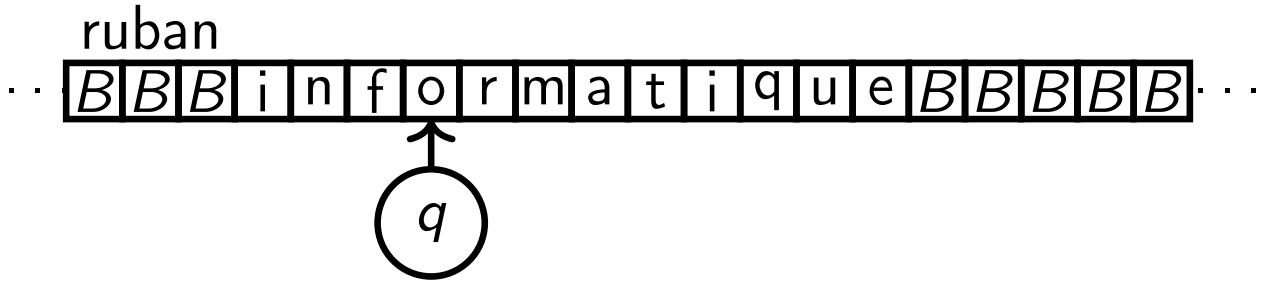
$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \delta, q_0, q_a, q_r)$$

où :

1. Q est l'ensemble *fini* des états ;
2. Σ est un alphabet *fini* ;
3. Γ est l'alphabet de travail *fini* : $\Sigma \subset \Gamma$;
4. $B \in \Gamma$, $B \notin \Sigma$ est le caractère blanc ;
5. $q_0 \in Q$ est l'état initial ;
6. $q_a \in Q$ est l'état d'acceptation ;
7. $q_r \in Q$ est l'état de refus (ou d'arrêt) ;
8. δ est la fonction de transition : δ est une fonction (possiblement partielle) de $Q \times \Gamma$ dans $Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, |, \rightarrow\}$. Le symbole $\leftarrow$ est utilisé pour signifier un déplacement vers la gauche, $\rightarrow$ un déplacement vers la droite, et $|$ aucun déplacement.

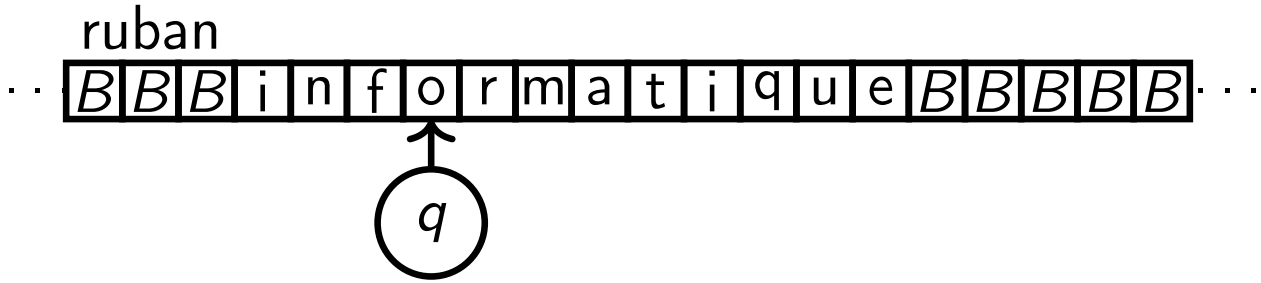
Configuration

- **Une configuration** est donnée par la description du ruban, par la position de la tête de lecture/écriture, et par l'état interne.



Configuration

- **Une configuration** est donnée par la description du ruban, par la position de la tête de lecture/écriture, et par l'état interne.



  - Notation 1 : $(q, fni, ormatique)$
    - Cas général : $C = (q, u, v)$, avec $u, v \in \Gamma^*$, $q \in Q$: u et v désignent le contenu respectivement à gauche et à droite de la tête de lecture du ruban, la tête de lecture du ruban étant sur la première lettre de v. On suppose que les dernières lettres de u et de v ne sont pas B, qu'à droite et à gauche de u et v sur le ruban il n'y a que des B et que v est écrit de gauche à droite, et u de droite à gauche.
  - Notation 2 : $inf\,\mathbf{q}ormatique$.
    - Cas général : $u\mathbf{q}v$, en gardant u et v écrit de gauche à droite.

Dérivations entre configurations

- Une configuration est dite **acceptante** si $q = q_a$, **refusante** si $q = q_r$.
- Pour $w \in \Sigma^*$, la configuration initiale correspondant à w est la configuration $C[w] = (q_0, \epsilon, w)$.
- On note : $C \vdash C'$ si la configuration C' est le successeur direct de la configuration C par le programme δ de la machine de Turing.

2. Avec la convention que la première lettre du mot vide est le blanc B.

Dérivations entre configurations

- Une configuration est dite **acceptante** si $q = q_a$, **refusante** si $q = q_r$.
- Pour $w \in \Sigma^*$, la configuration initiale correspondant à w est la configuration $C[w] = (q_0, \epsilon, w)$.
- On note : $C \vdash C'$ si la configuration C' est le successeur direct de la configuration C par le programme δ de la machine de Turing.
  - Formellement, si $C = (q, u, v)$ et si a désigne la première lettre[2] de v, et si $\delta(q, a) = (q', a', m')$ alors $C \vdash C'$ si
    - $C' = (q', u', v')$, et
    - si $m' = \rightarrow$, $u' = a'u$, et v' est obtenu en supprimant la première lettre a de v.
    - si $m' = \leftarrow$, u' est obtenu en supprimant la première lettre a'' de u, et v' est obtenu en concaténtant a'' et le resultat du remplacement de la premère lettre a de v par a'.
    - si $m' = |$, $u' = u$, et v' est obtenu en remplaçant la premère lettre a de v par a'.

2. Avec la convention que la première lettre du mot vide est le blanc B.

Calcul par une machine de Turing

- Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit **accepté** (en temps t) par la machine de Turing, s'il existe une suite de configurations $C_1, \cdots, C_t$ avec :
  1. $C_0 = C[w]$;
  2. $C_i \vdash C_{i+1}$ pour tout $i < t$;
  3. aucune configuration C_i pour $i < t$ n'est acceptante ou refusante.
  4. C_t est acceptante.

- Un mot $w \in \Sigma^*$ est dit **refusé** (en temps t) par la machine de Turing, s'il existe une suite de configurations $C_1, \cdots, C_t$ avec :
  1. $C_0 = C[w]$;
  2. $C_i \vdash C_{i+1}$ pour tout $i < t$;
  3. aucune configuration C_i pour $i < t$ n'est acceptante ou refusante.
  4. C_t est refusante.

- On dit que la machine de Turing **s'arrête** sur un mot w, si w est accepté, ou refusé, **boucle** dans le cas contraire (= n'est ni accepté, ni refusé).

Calcul par une machine de Turing

- Le langage $L \subset \Sigma^*$ **accepté par** M, noté $L(M)$ est l'ensemble des mots w qui sont acceptés par la machine.

- On dit qu'un langage $L \subset \Sigma^*$ est **décidé par** Σ par la machine si :

  - pour $w \in L$, w est accepté par la machine ;
  - pour $w \notin L$ (=sinon), w est refusé par la machine.

    - Autrement dit, la machine accepte L et termine sur toute entrée.

Plus précisément

Machines de Turing

- Ingrédients
- Description formelle
- Programmer avec des machines de Turing

Premier programme

- Construire une machine de Turing qui accepte exactement les mots w sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ de la forme $0^n 1^n$, $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Premier programme

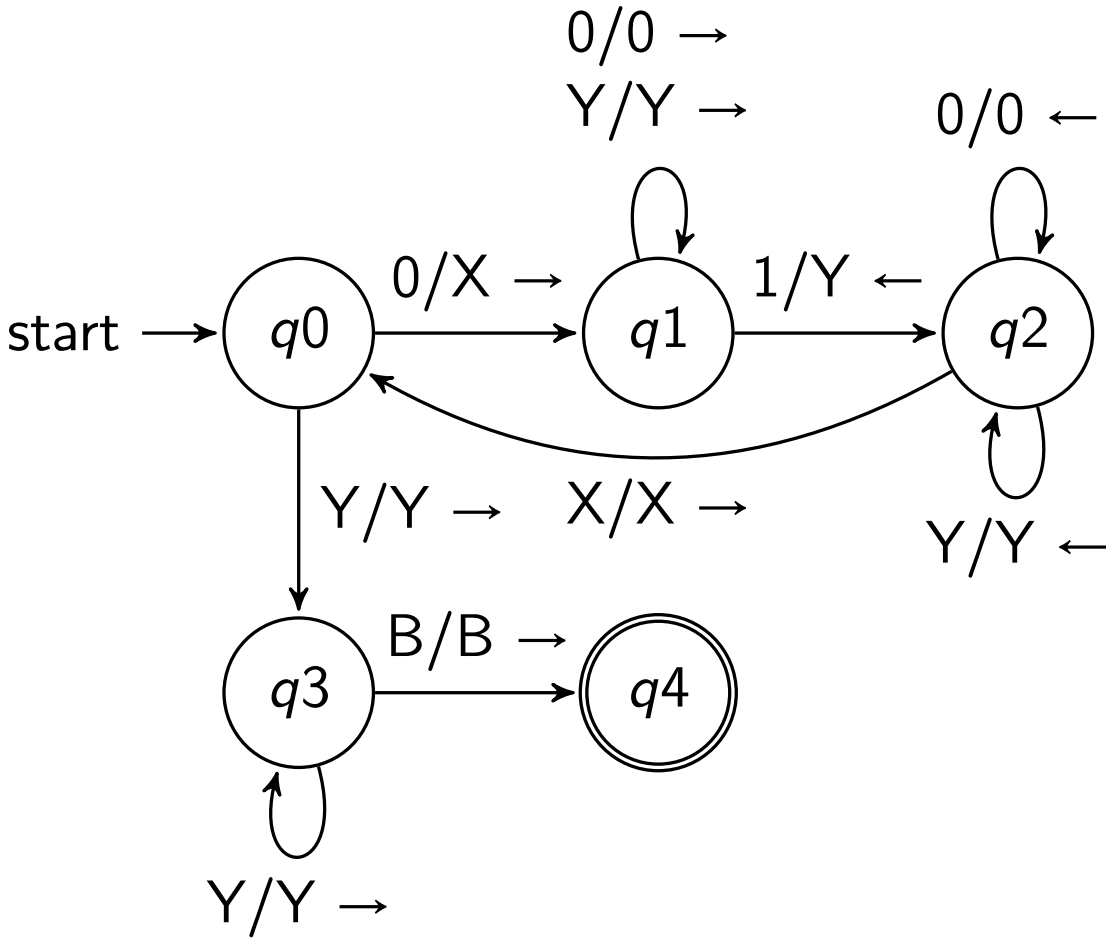
- Construire une machine de Turing qui accepte exactement les mots w sur l'alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ de la forme 0^n1^n, $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

  - Voici une solution :
    - On considère une machine avec $Q = \{q0, q1, q2, q3, q4\}$, $\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$,
    - l'état d'acceptation $q4$ et une fonction de transition δ telle que :
    - $\delta(q0, 0) = (q1, X, \rightarrow)$;
    - $\delta(q0, Y) = (q3, Y, \rightarrow)$;
    - $\delta(q1, 0) = (q1, 0, \rightarrow)$;
    - $\delta(q1, 1) = (q2, Y, \leftarrow)$;
    - $\delta(q1, Y) = (q1, Y, \rightarrow)$;
    - $\delta(q2, 0) = (q2, 0, \leftarrow)$;
    - $\delta(q2, X) = (q0, X, \rightarrow)$;
    - $\delta(q2, Y) = (q2, Y, \leftarrow)$;
    - $\delta(q3, Y) = (q3, Y, \rightarrow)$;
    - $\delta(q3, B) = (q4, B, \rightarrow)$.

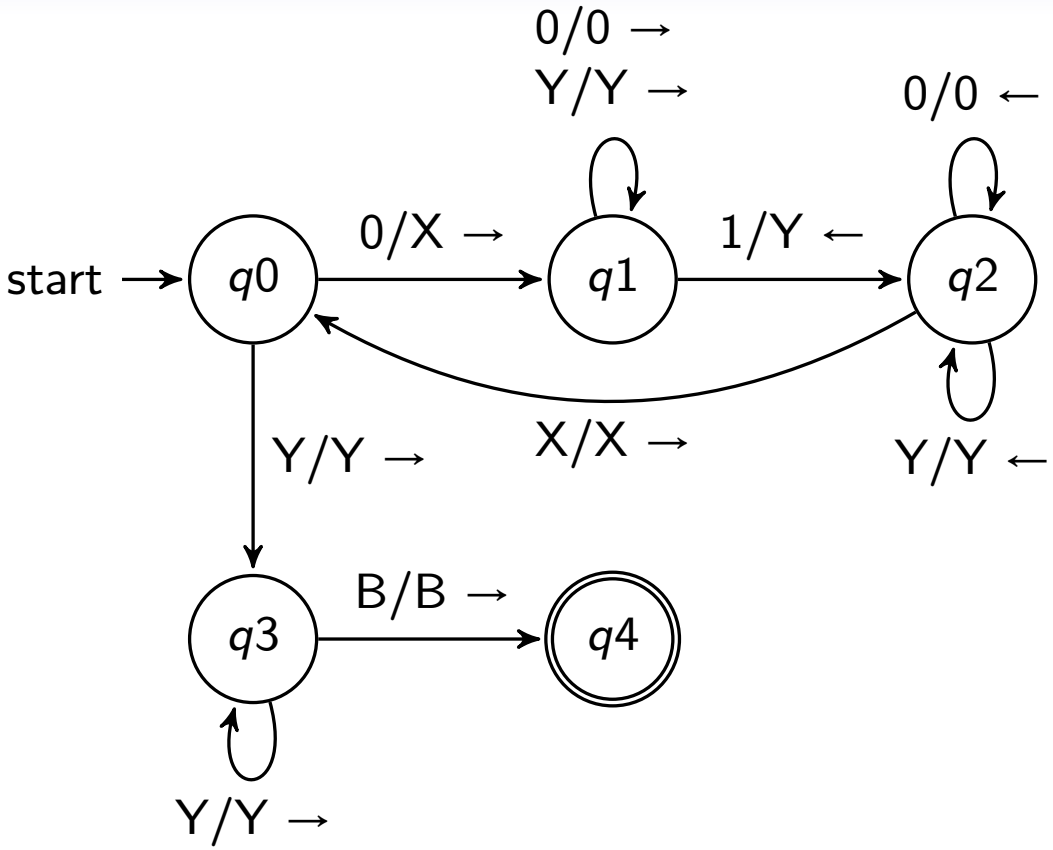
Représentation graphique

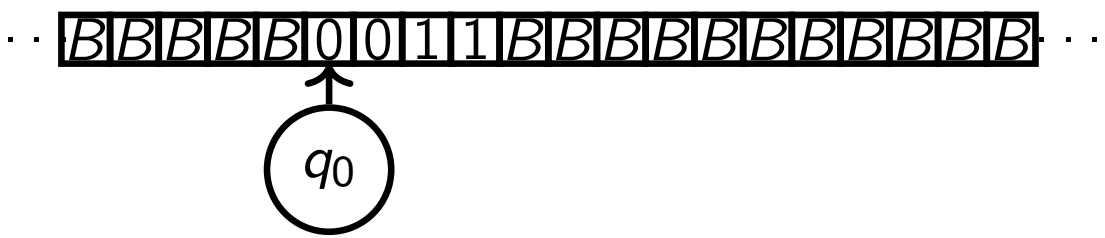
Convention graphique :

- les sommets du graphe représentent les états de la machine ;
- on représente chaque transition $\delta(q, a) = (q', a', m)$ par un arc de l'état q vers l'état q' étiqueté par $a/a'\ m$;
- l'état initial est marqué par une flèche entrante ;
- l'état d'acceptation est marqué par un double cercle.

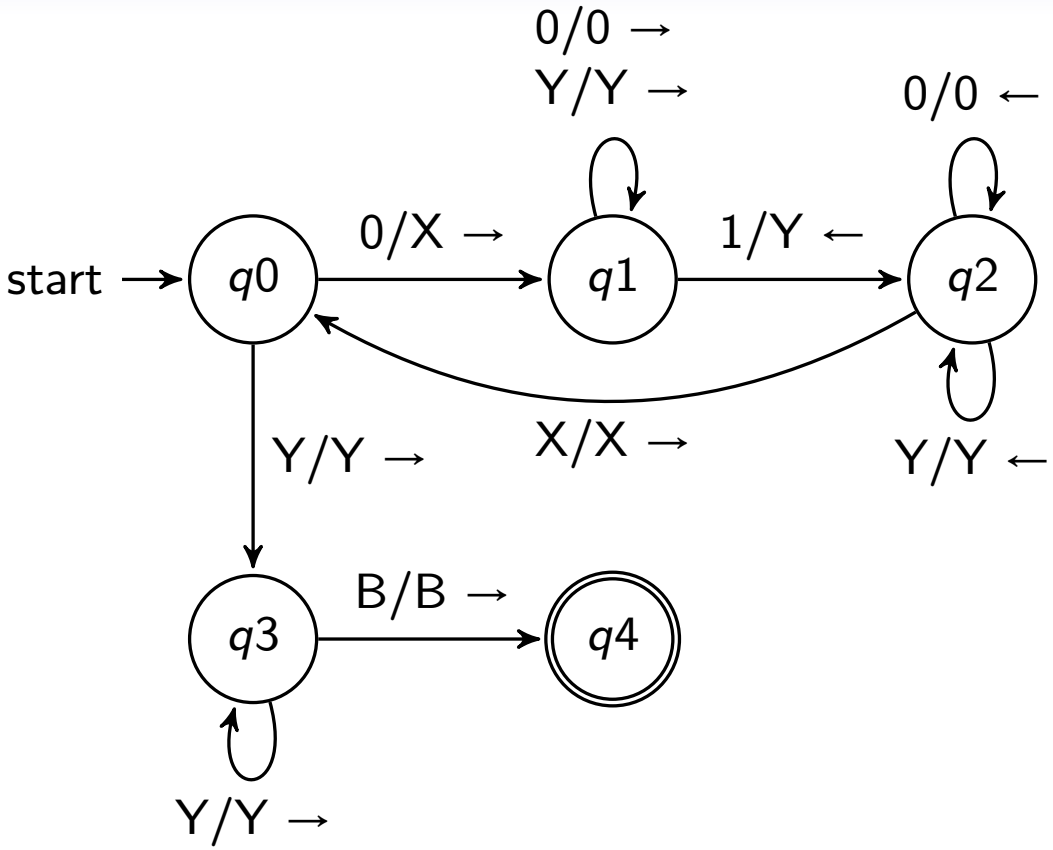


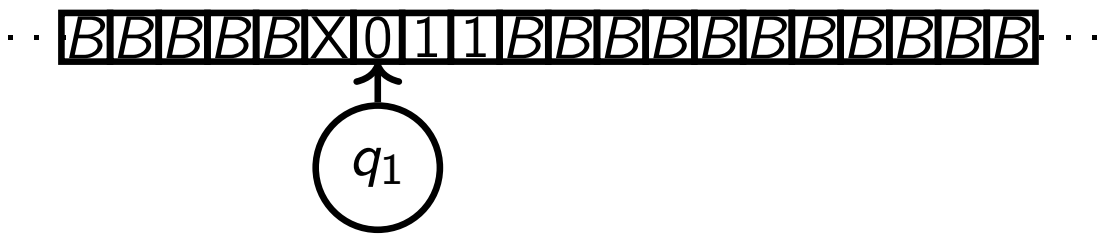
Comment fonctionne-t-il ?



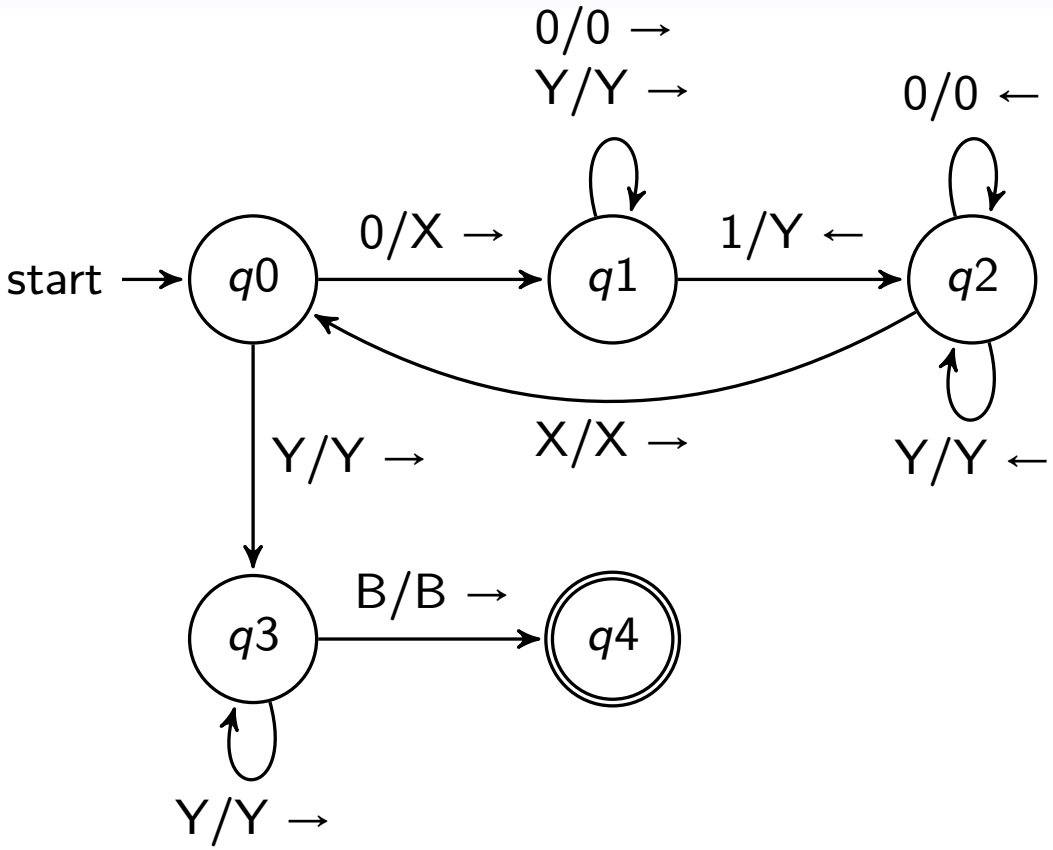


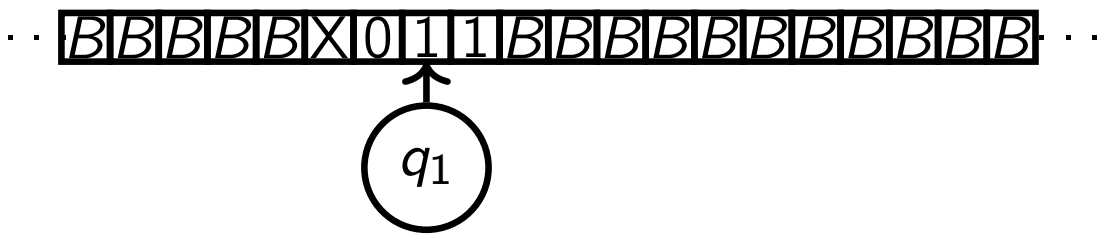
Comment fonctionne-t-il ?



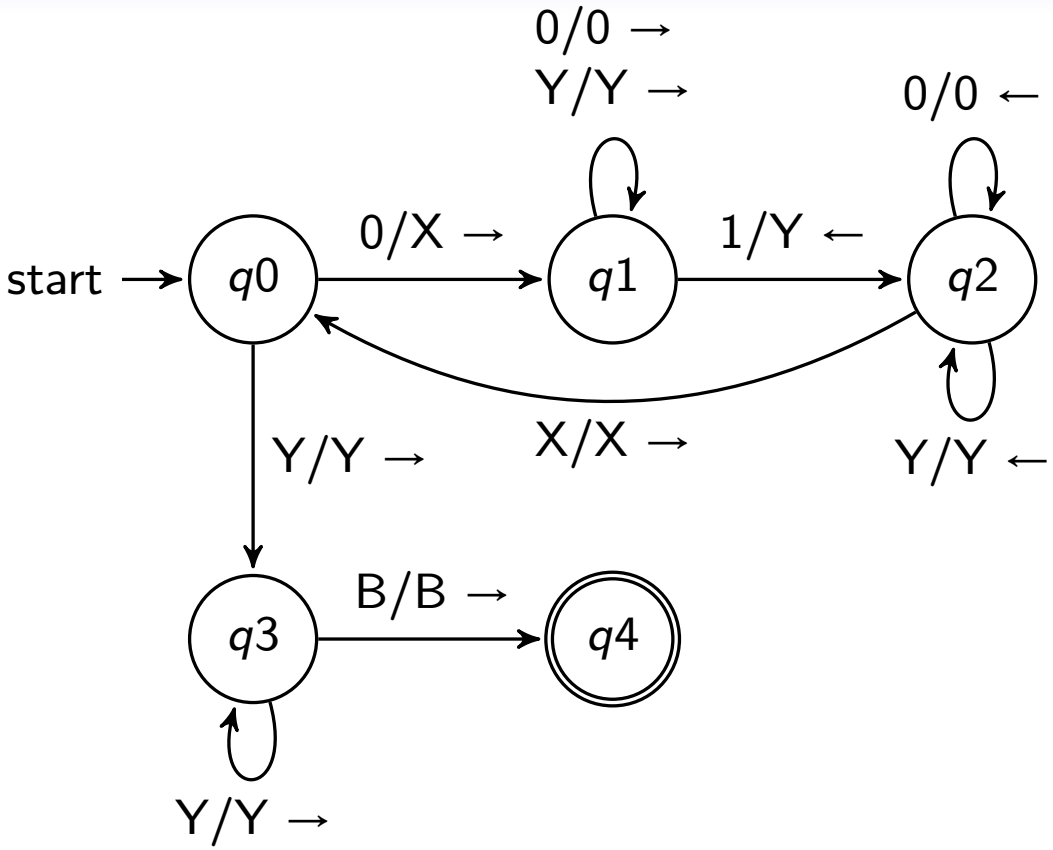


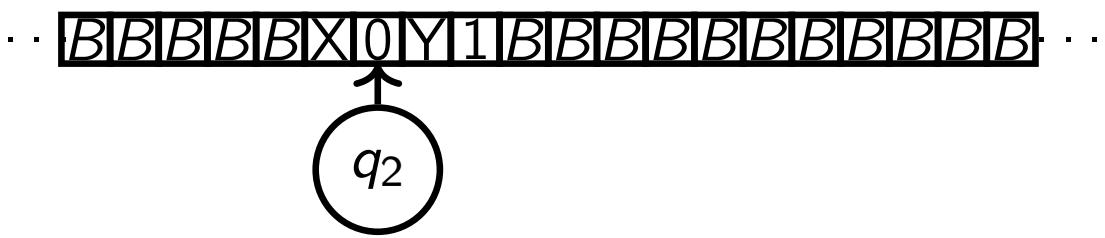
Comment fonctionne-t-il ?



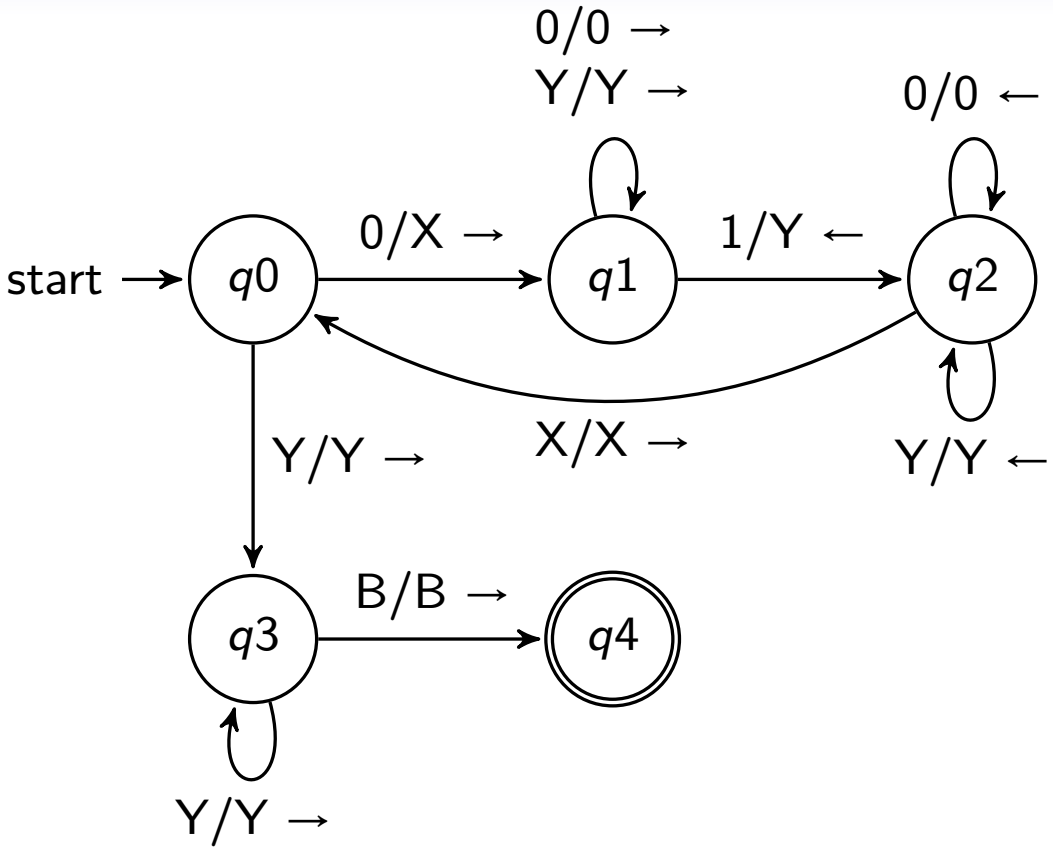


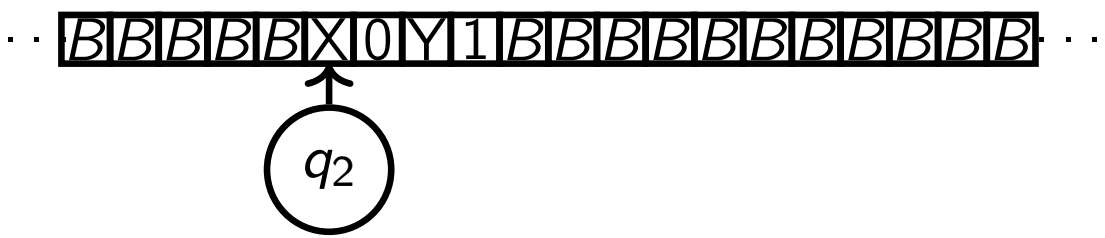
Comment fonctionne-t-il ?



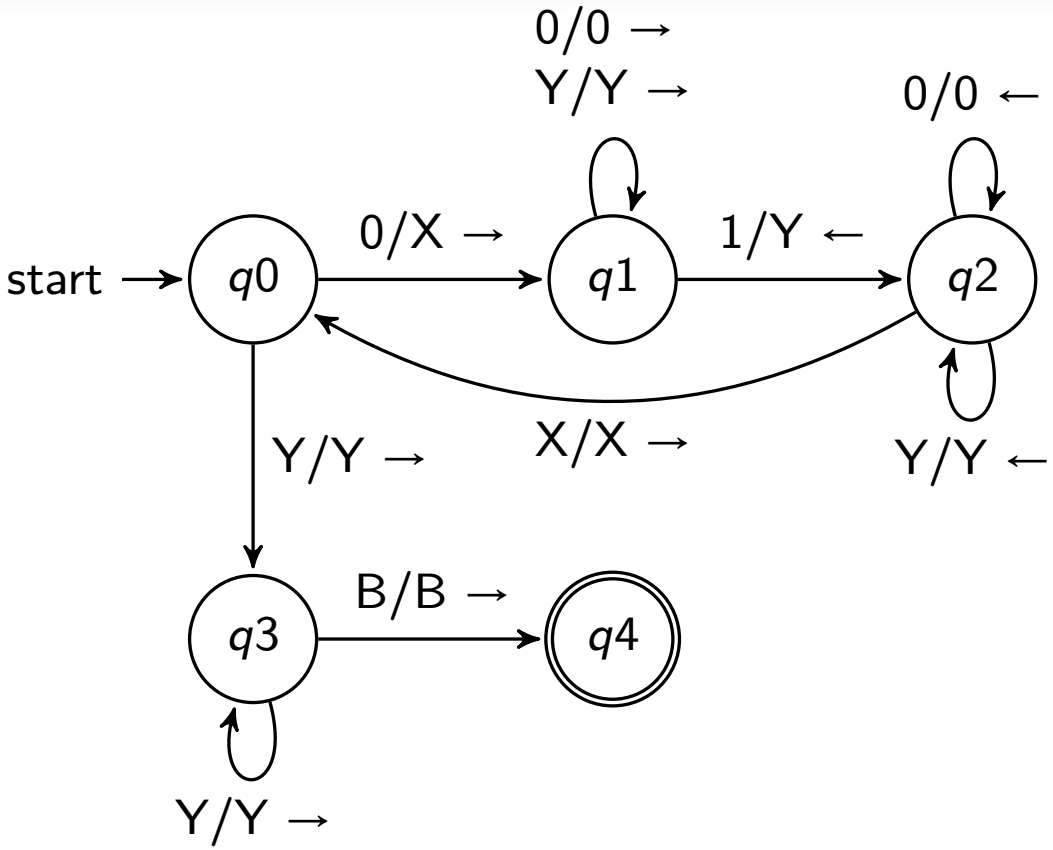


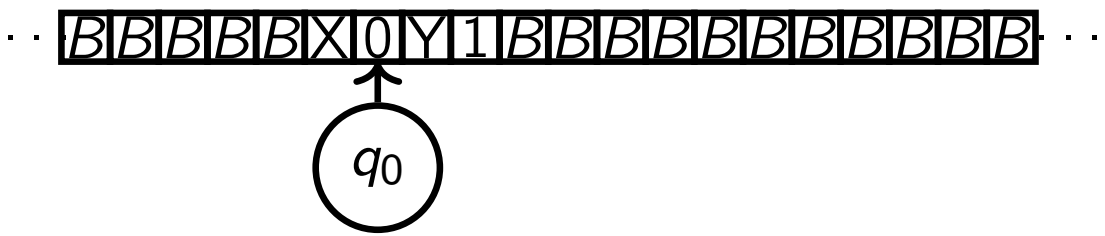
Comment fonctionne-t-il ?



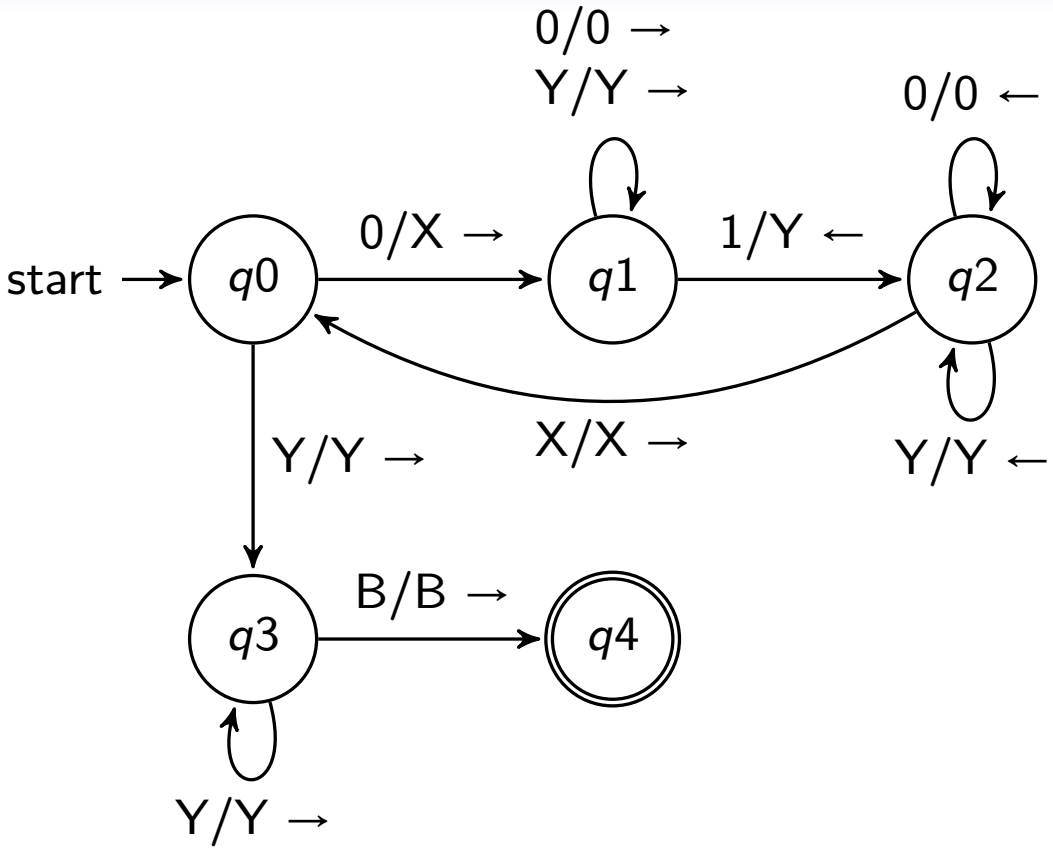


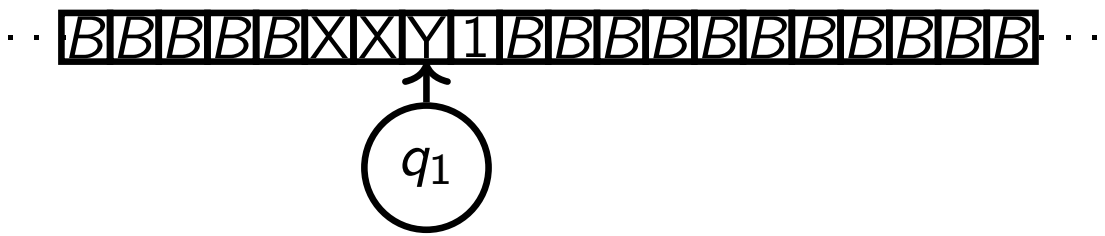
Comment fonctionne-t-il ?



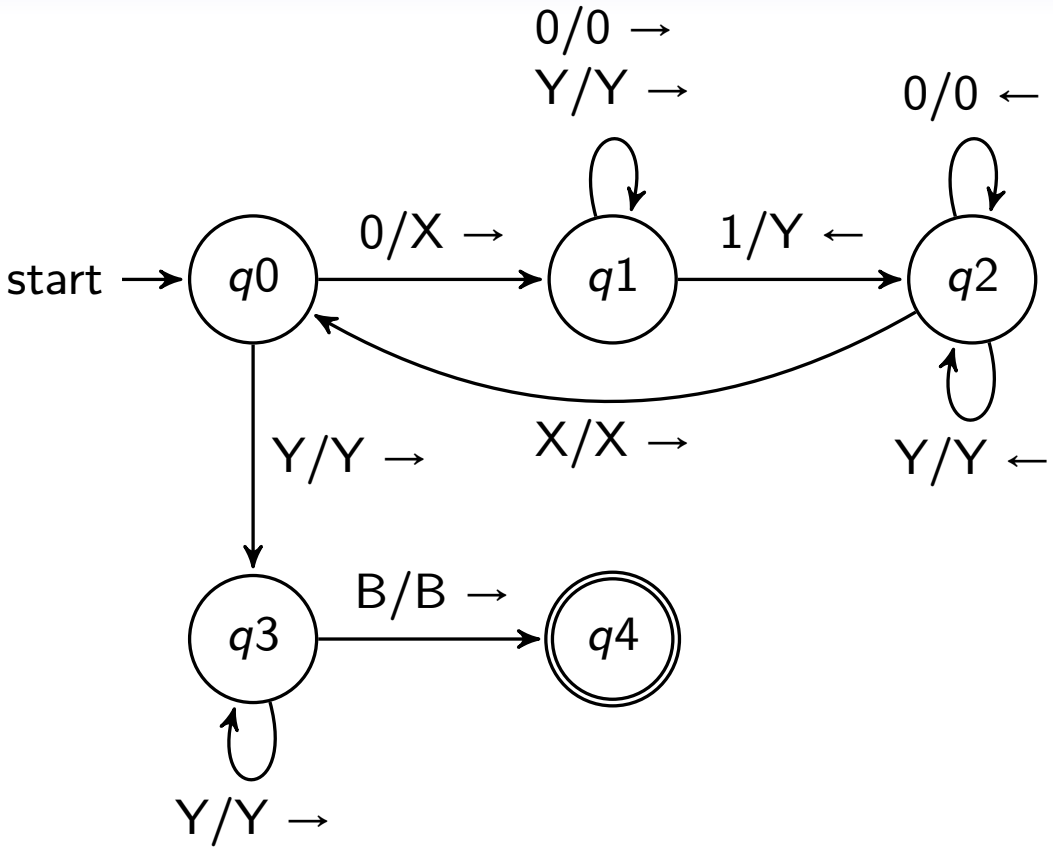


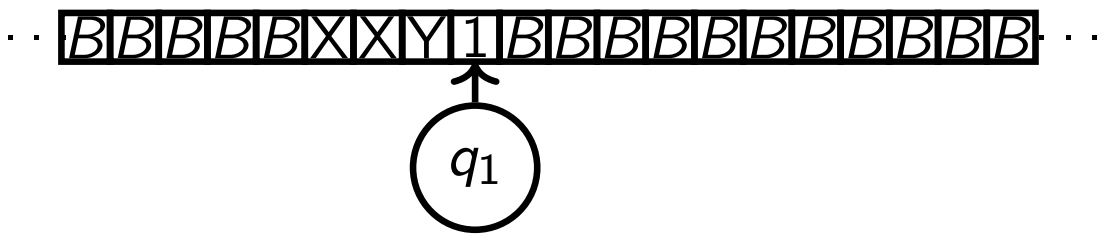
Comment fonctionne-t-il ?



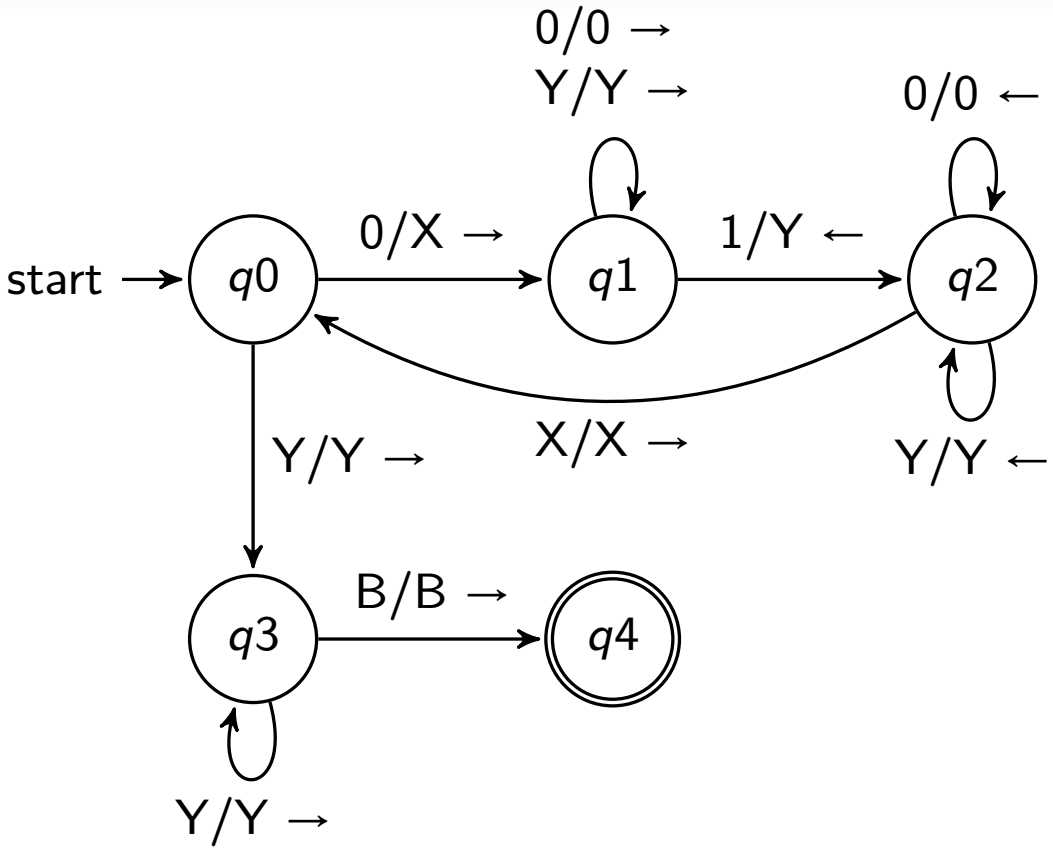


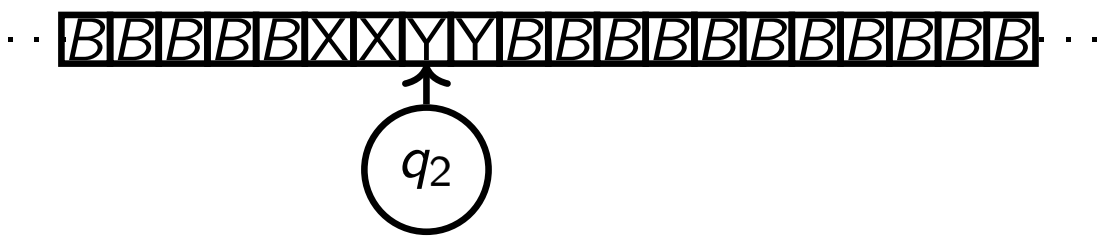
Comment fonctionne-t-il ?



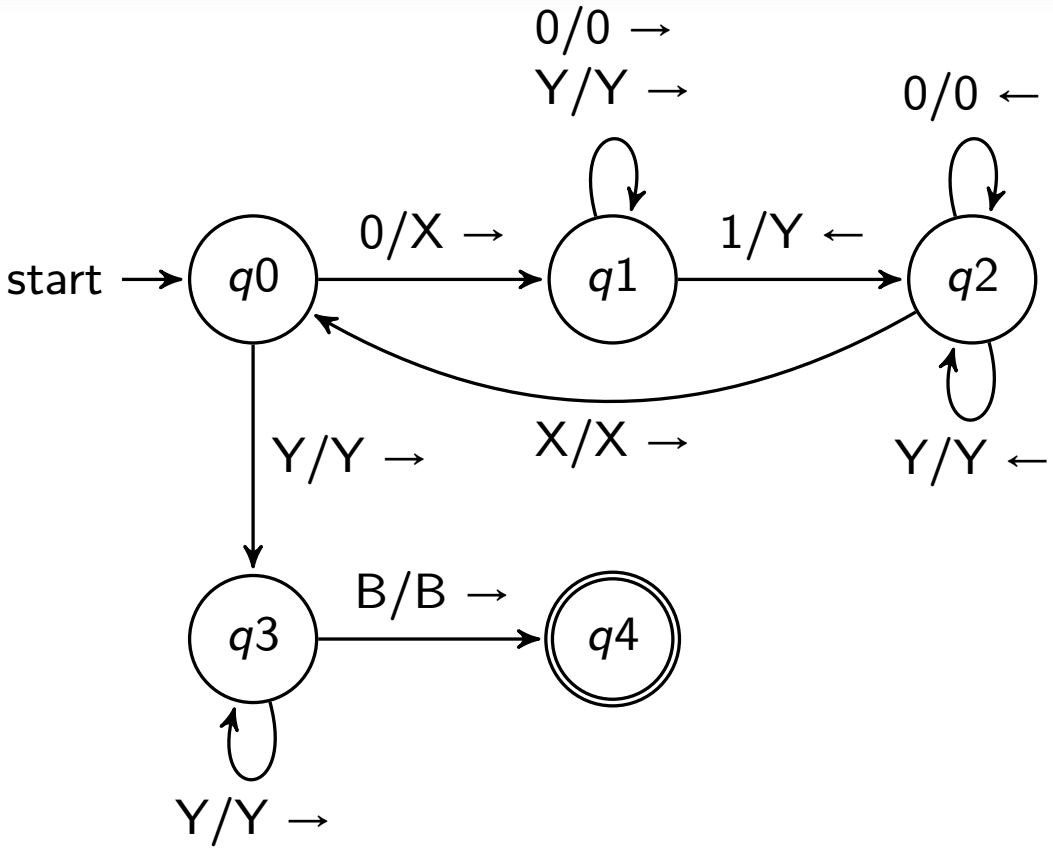


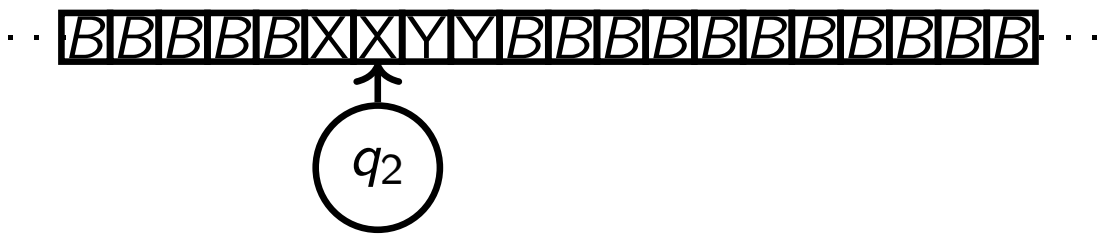
Comment fonctionne-t-il ?



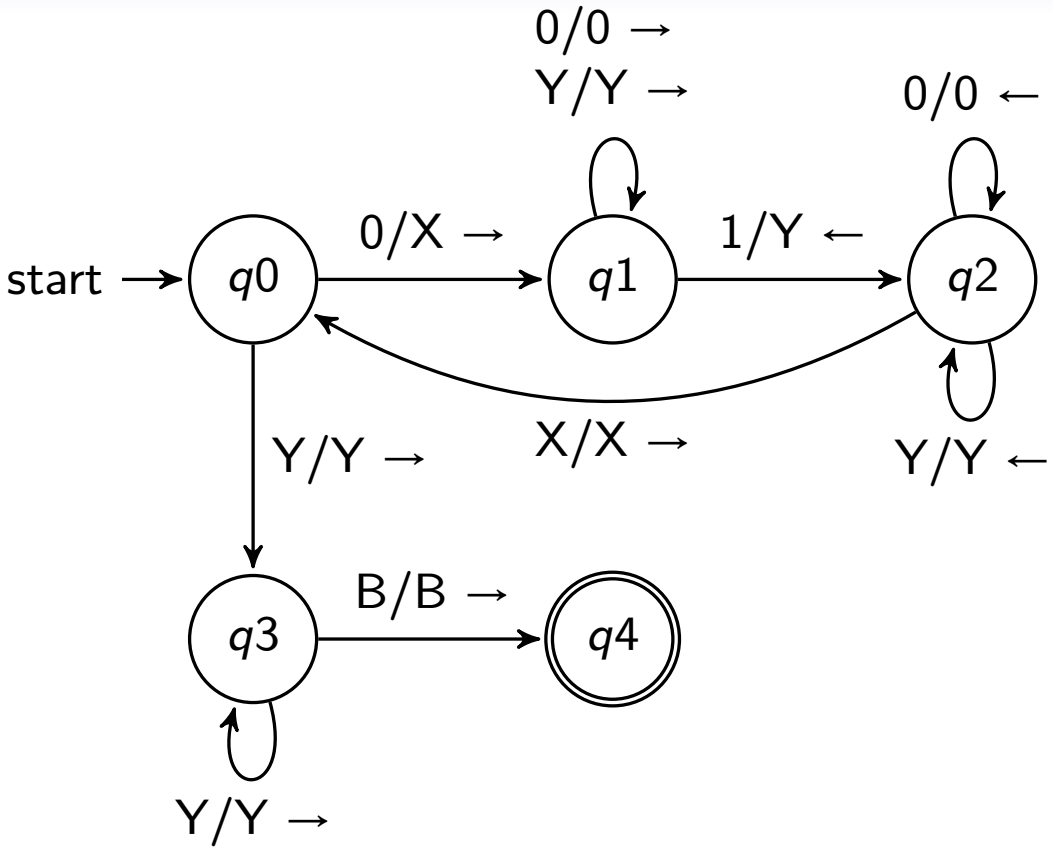


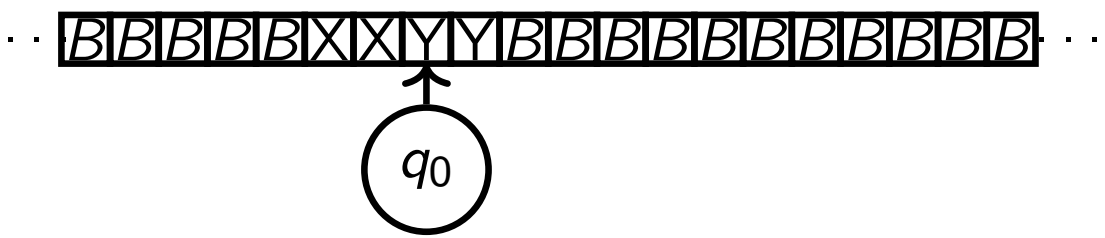
Comment fonctionne-t-il ?



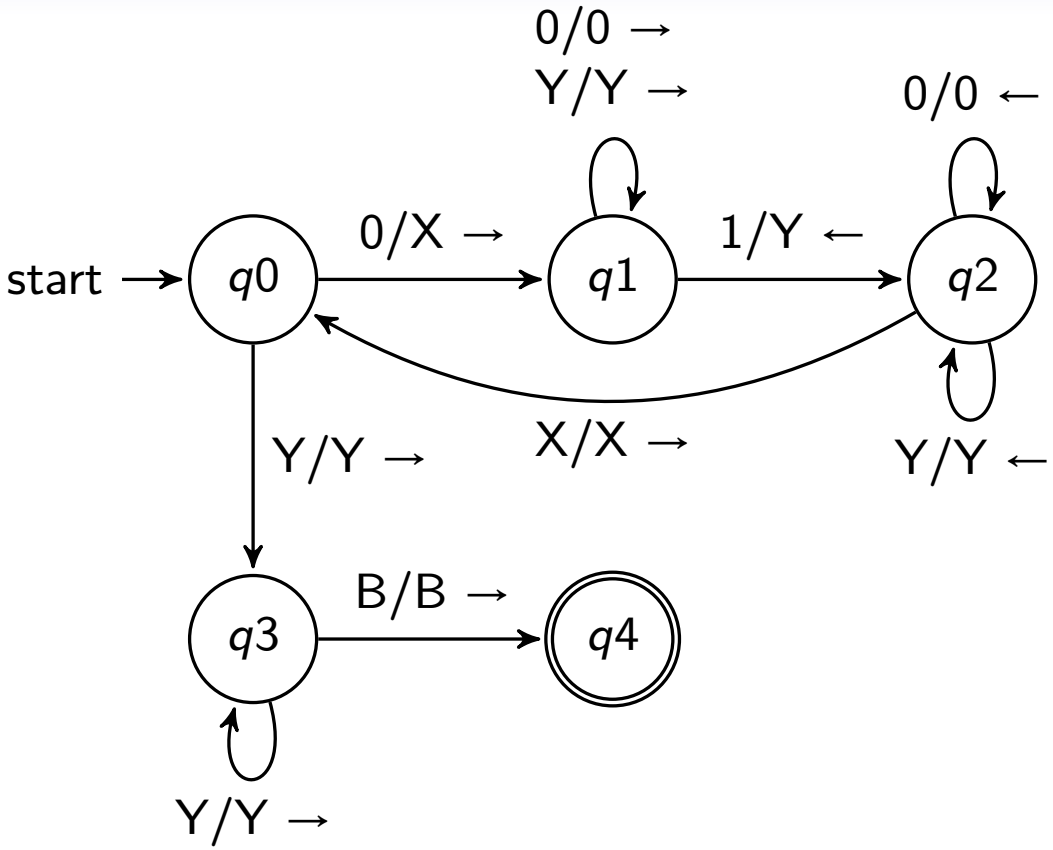


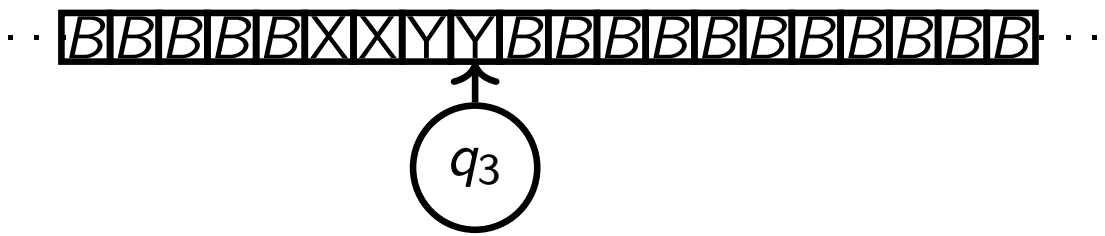
Comment fonctionne-t-il ?



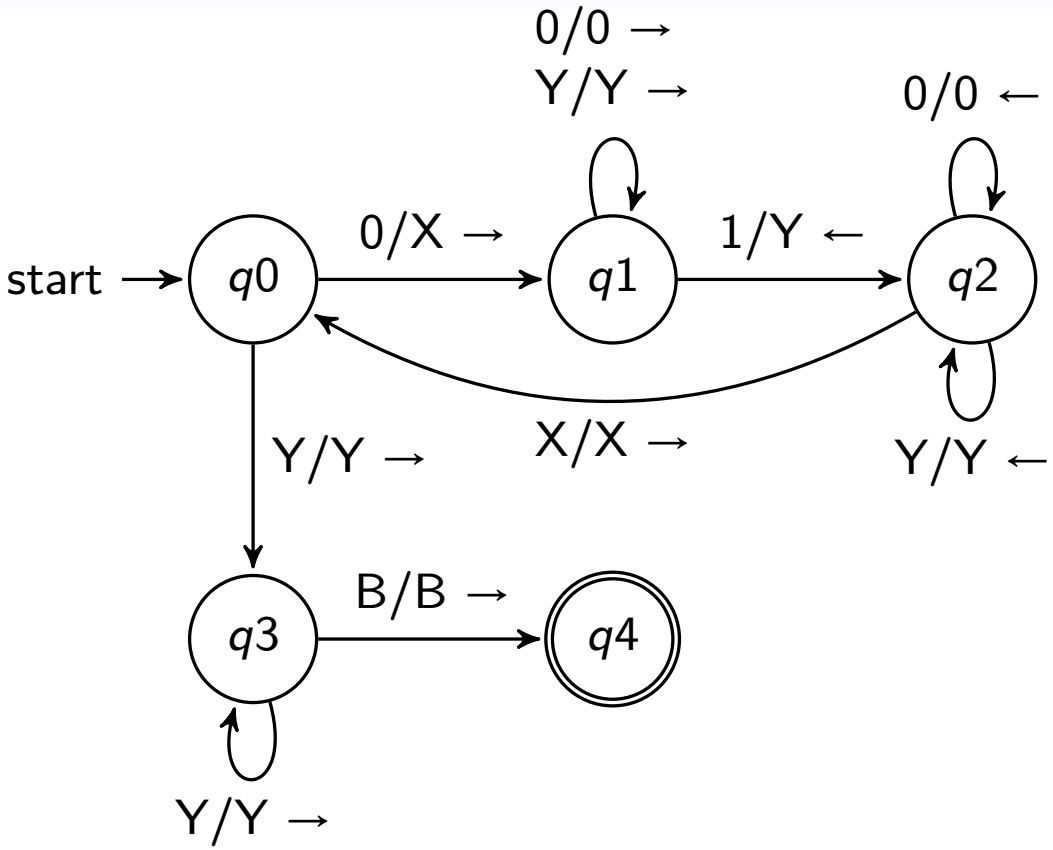


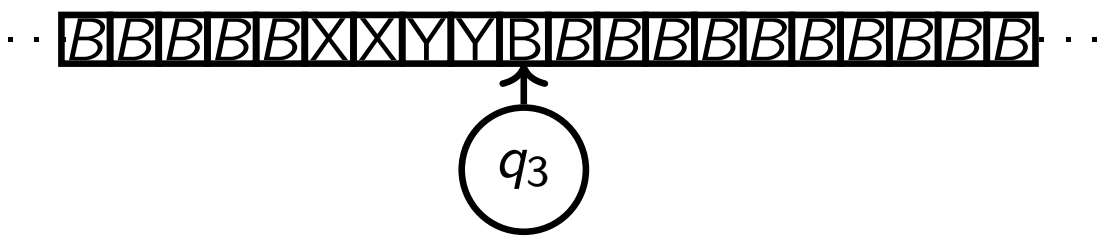
Comment fonctionne-t-il ?



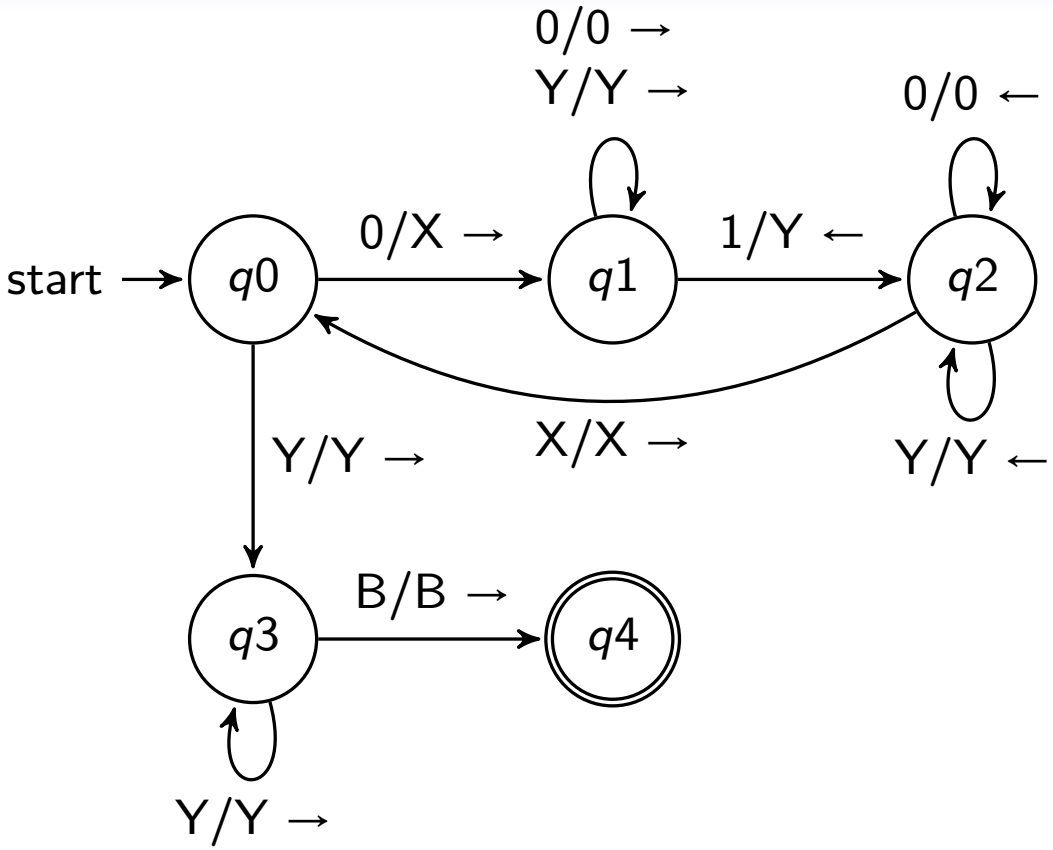


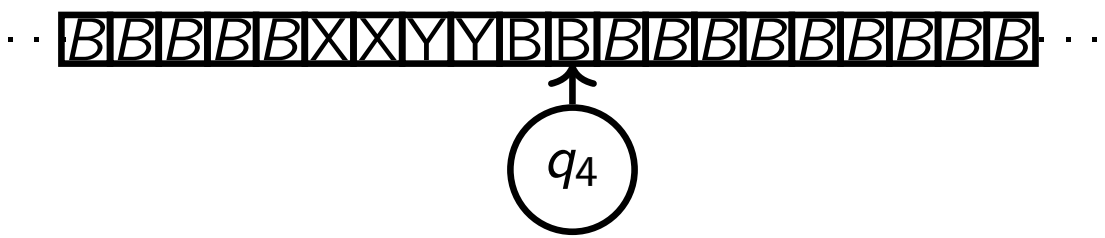
Comment fonctionne-t-il ?





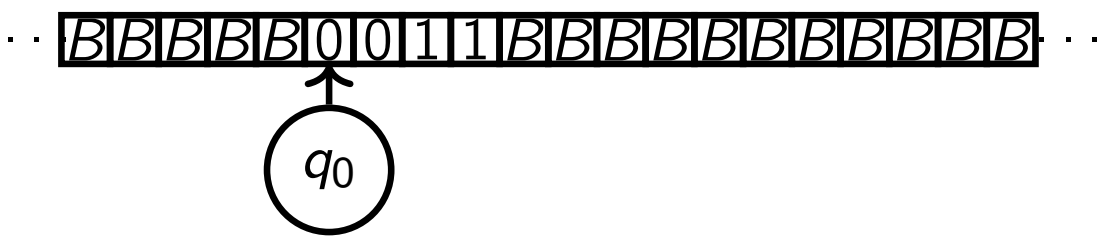
Comment fonctionne-t-il ?





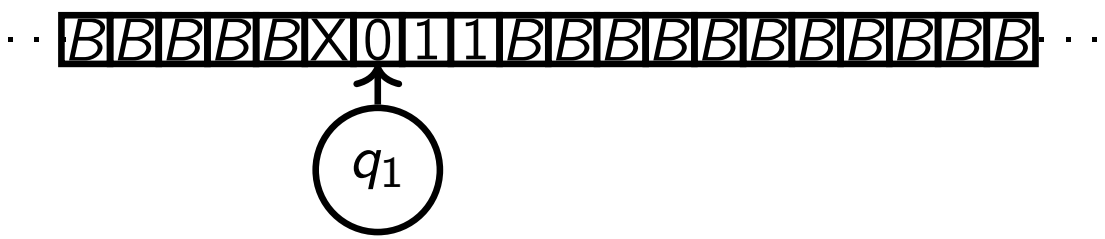
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



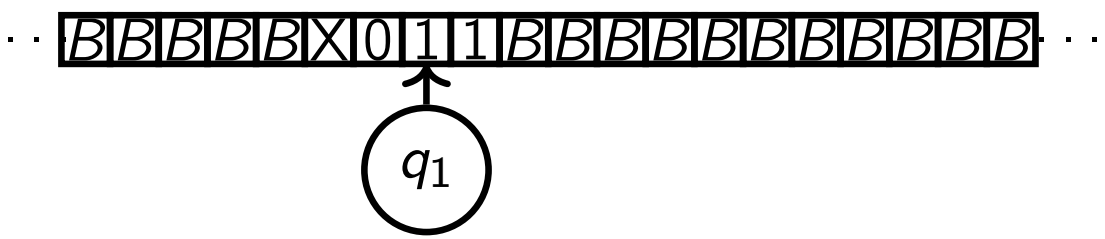
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



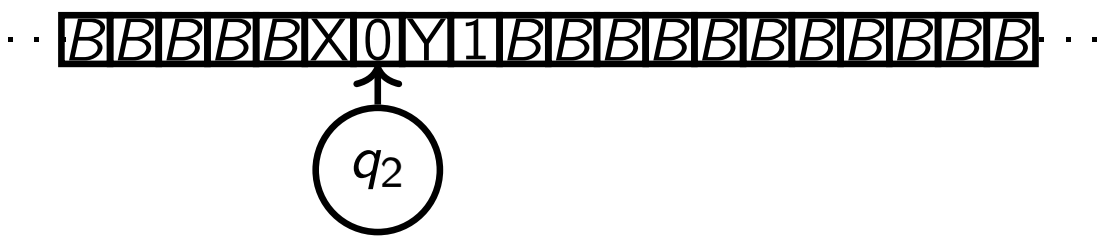
Principe :

- Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
- A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
  - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
  - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
  - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
- Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
  - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
- Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



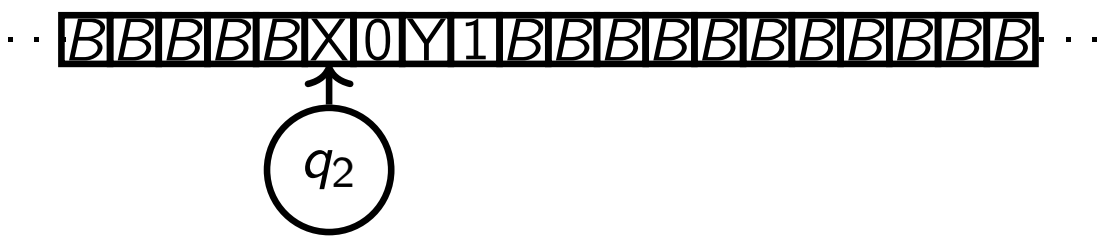
Principe :

- Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
- A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
  - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
  - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
  - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
- Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
  - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
- Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



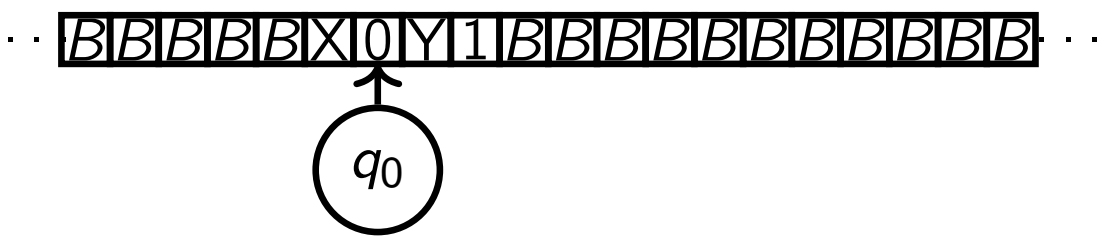
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



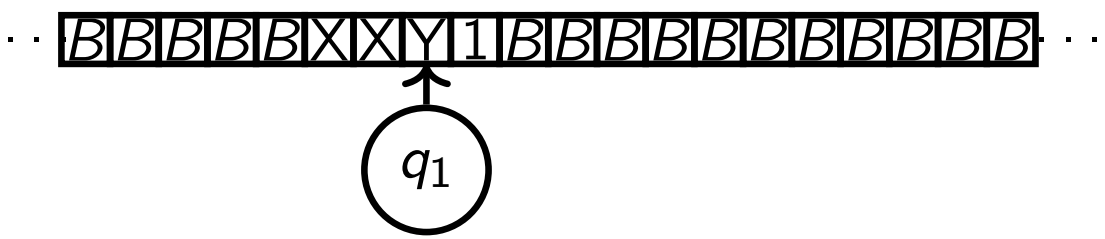
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



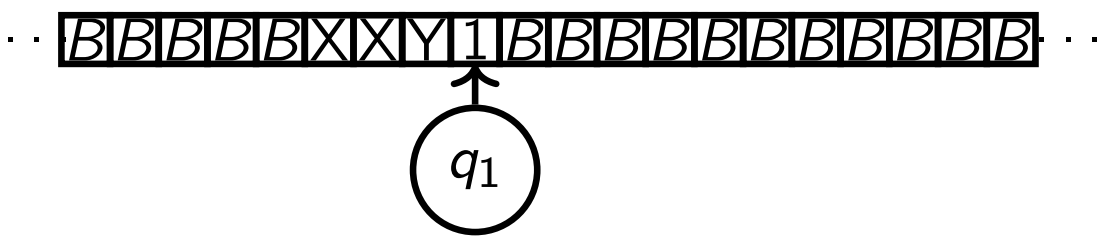
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



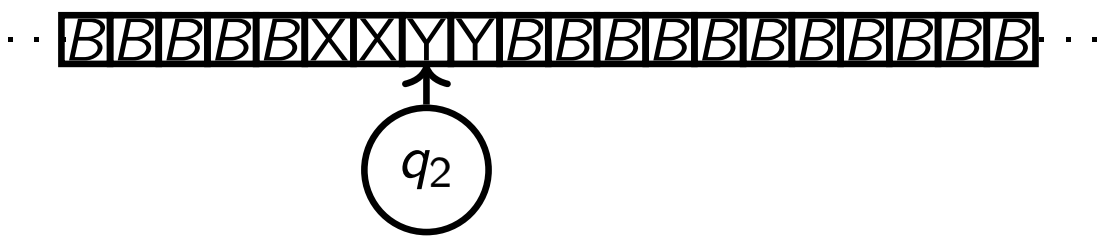
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



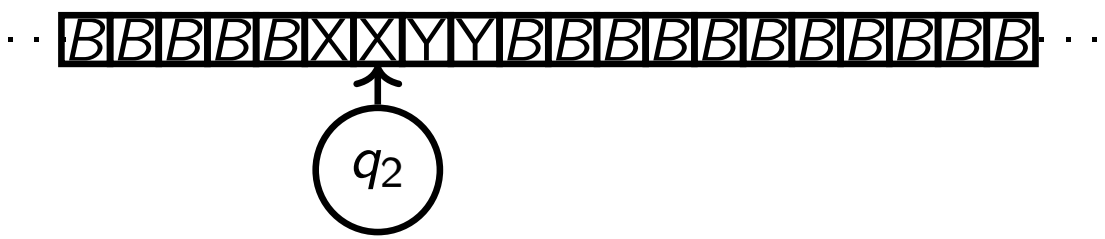
Principe :

- Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
- A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
  - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
  - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
  - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
- Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
  - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
- Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



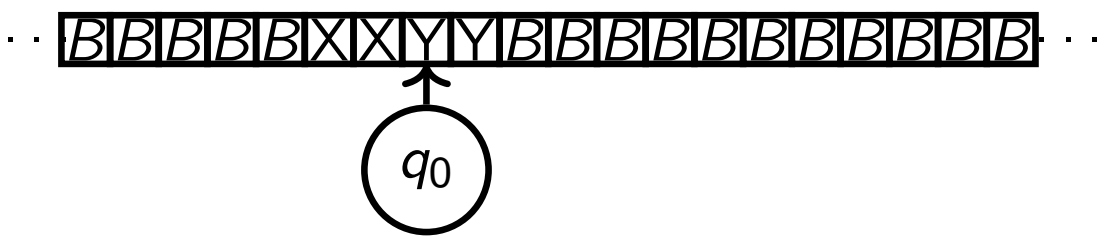
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



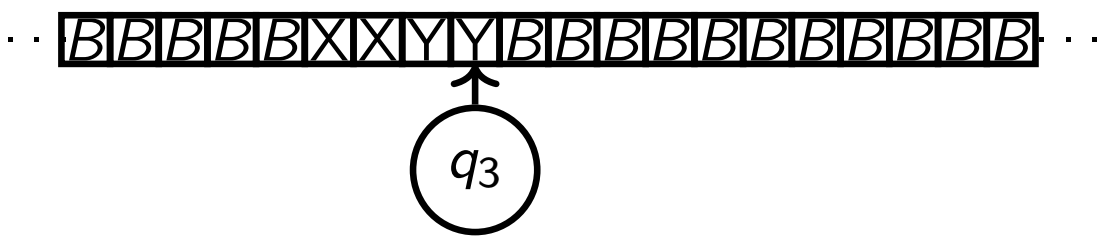
Principe :

- Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
- A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
  - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
  - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
  - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
- Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
  - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
- Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



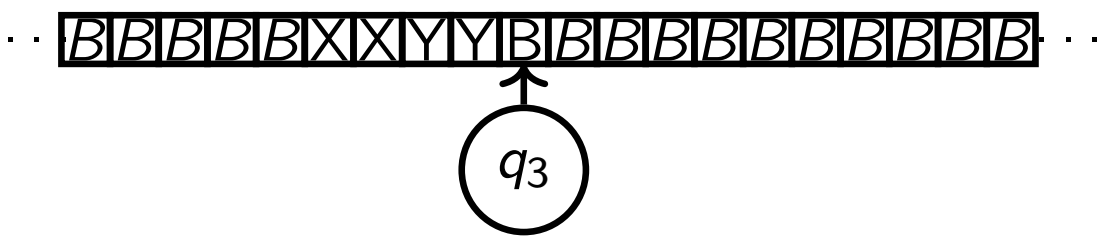
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



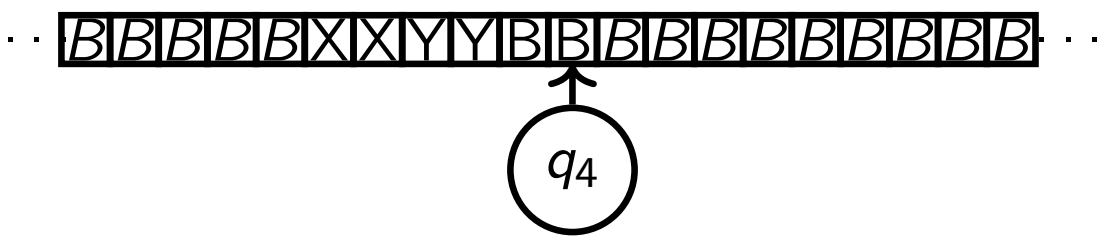
- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



- Principe :

  - Le ruban reste de la forme $X^*0^*Y^*1^*$.
  - A chaque fois que l'on lit un 0, on le remplace par un X, et on rentre dans l'état $q1$, ce qui correspond à lancer la sous-procédure suivante :
    - on se déplace à droite tant que l'on lit un 0 ou un Y ;
    - dès qu'on a atteint un 1, on le transforme en un Y, et on revient à gauche jusqu'à revenir sur un X (le X qu'on avait écrit) et s'être déplacé d'une case vers la droite.
    - En faisant ainsi, pour chaque 0 effacé (i.e. X marqué), on aura effacé un 1 (i.e. marqué un Y).
  - Si on a marqué tous les 0 et que l'on atteint un Y, on rentre dans l'état $q3$,
    - ce qui a pour objet de vérifier que ce qui est à droite est bien constitué uniquement de Y.
  - Lorsqu'on a tout lu, c-à-d atteint un B, on accepte, c'est-à-dire on va dans l'état $q4$.



Soustraction en unaire

- Construire un programme de machine de Turing qui réalise une soustraction en unaire : partant d'un mot de la forme 0^m10^n, la machine s'arrête avec $0^{m \ominus n}$ sur son ruban (entouré de blancs), où $m \ominus n$ est $\max(0, m-n)$.

▸ Détails

Exercices

- Construire une machine de Turing qui ajoute (respectivement : soustrait) 1 au nombre écrit en binaire sur son ruban.
- Construire une machine de Turing qui renverse son entrée : partant de $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, la machine s'arrête avec le mot $w^R = a_n \cdots a_2 a_1$.
- Construire une machine de Turing qui partant d'un mot $w\#w_1\#w_2$, avec w, w_1, w_2 écrits sur l'alphabet $\{0,1\}$, le remplace par $w_1\#w\#w_2$.
- ...

Exercices

- Construire une machine de Turing qui ajoute (respectivement : soustrait) 1 au nombre écrit en binaire sur son ruban.
- Construire une machine de Turing qui renverse son entrée : partant de $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, la machine s'arrête avec le mot $w^R = a_n \cdots a_2 a_1$.
- Construire une machine de Turing qui partant d'un mot $w\#w_1\#w_2$, avec w, w_1, w_2 écrits sur l'alphabet $\{0,1\}$, le remplace par $w_1\#w\#w_2$.
- ...
- voir la PC de demain.
- ...

Au menu

Retour sur l'épisode précédent : complétude

Graphes, Groupes, Corps, . . .Et les entiers ?

Théorème d'incomplétude

Quelques applications

Objectif de la suite du cours

Machines de Turing

Demain et Prochain épisode

Plus précisément

Demain et Prochain épisode

Thèse de Church

Thèse de Church

- Thèse de Church:

> Calculable dans un sens intuitif
> correspond à
> calculable par machine de Turing

ANNEXES

ANNEXE

Techniques de programmation

Variantes de la notion de machine de Turing

Technique 1 :
Utiliser l'état interne pour stocker une information finie.

- Exercice 1.
  - Construire un programme de machine de Turing qui lit le symbole en face de la tête de lecture et vérifie que ce dernier n'apparaît nulle part ailleurs à droite, sauf sur la toute dernière lettre à droite.

▸ Détails

Technique 2 :
Utiliser des sous-procédures

- Exercice 2 : Multiplication en unaire.
  - Construire un programme de machine de Turing qui réalise une multiplication en unaire : partant d'un mot de la forme 0^m10^n, la machine s'arrête avec 0^{m*n} sur son ruban.

▸ Détails

ANNEXE

Techniques de programmation

Variantes de la notion de machine de Turing

Robustesse du modèle

- Le modèle de la machine de Turing est extrêmement robuste.
- On peut en effet envisager de nombreuses variantes autour du concept de machine de Turing,

Robustesse du modèle

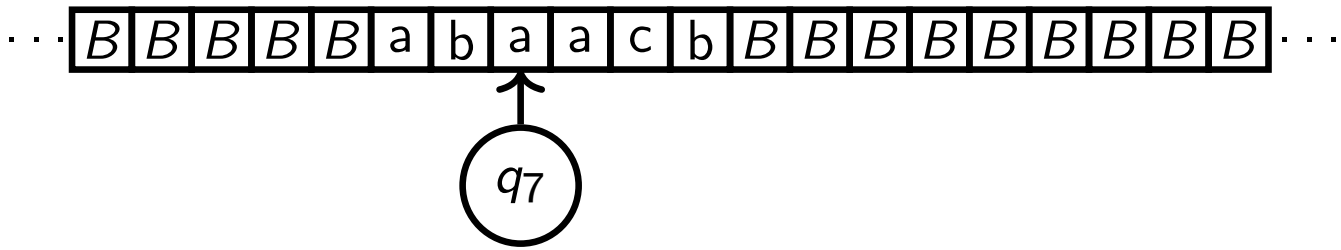
- Le modèle de la machine de Turing est extrêmement robuste.
- On peut en effet envisager de nombreuses variantes autour du concept de machine de Turing,
  - mais aucune de ces variantes ne change ce que l'on arrive à programmer avec ces machines.

Restriction à un alphabet binaire

- Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.

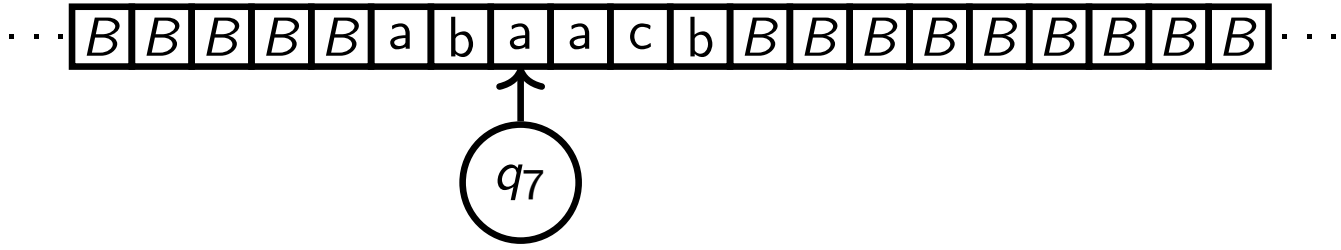
Restriction à un alphabet binaire

- Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.
- Idée de la démonstration :
  - Machine M sur l'alphabet $\{a, b, c\}$

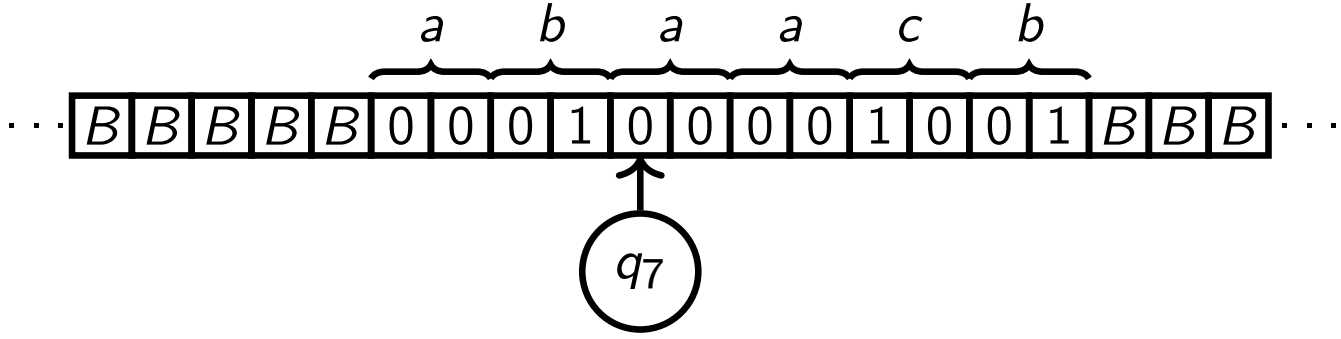


Restriction à un alphabet binaire

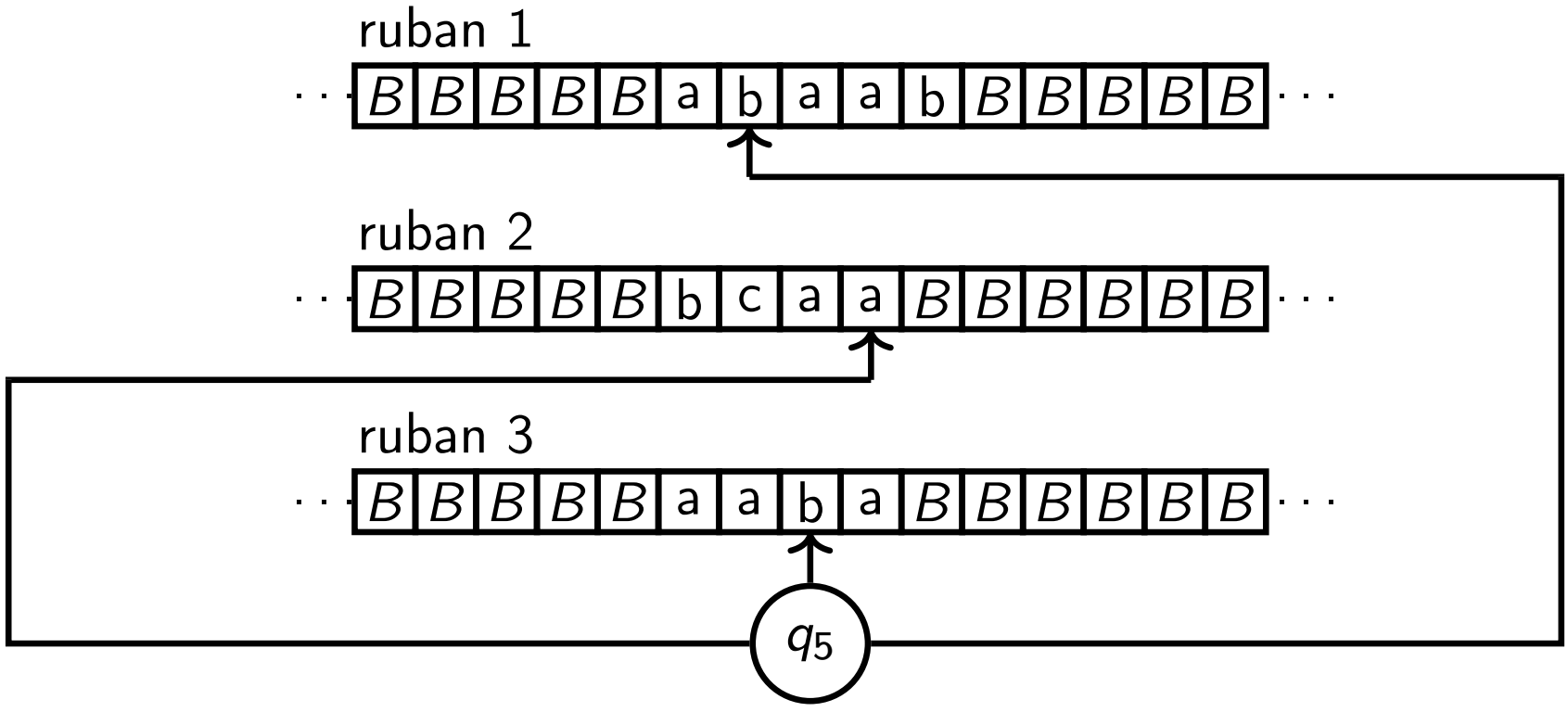
- Toute machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ quelconque peut être simulée par une machine de Turing qui travaille sur un alphabet Σ avec uniquement deux lettres, avec $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.
- Idée de la démonstration :
  - Machine M sur l'alphabet $\{a, b, c\}$



  - Machine M' simulant M sur l'alphabet $\{0, 1\}$.



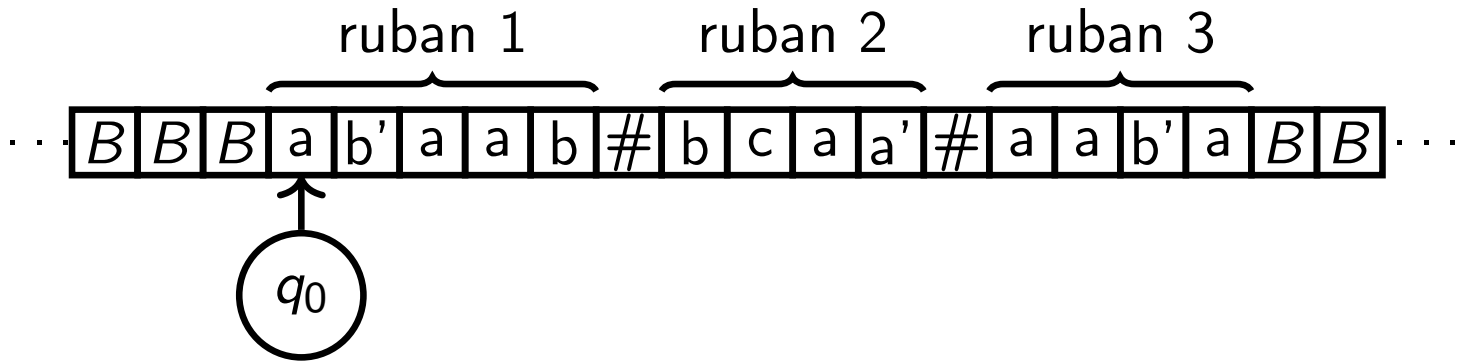
Machines de Turing à plusieurs rubans



- Toute machine de Turing qui travaille avec k rubans peut être simulée par une machine de Turing avec un unique ruban.

- Toute machine de Turing qui travaille avec k rubans peut être simulée par une machine de Turing avec un unique ruban.

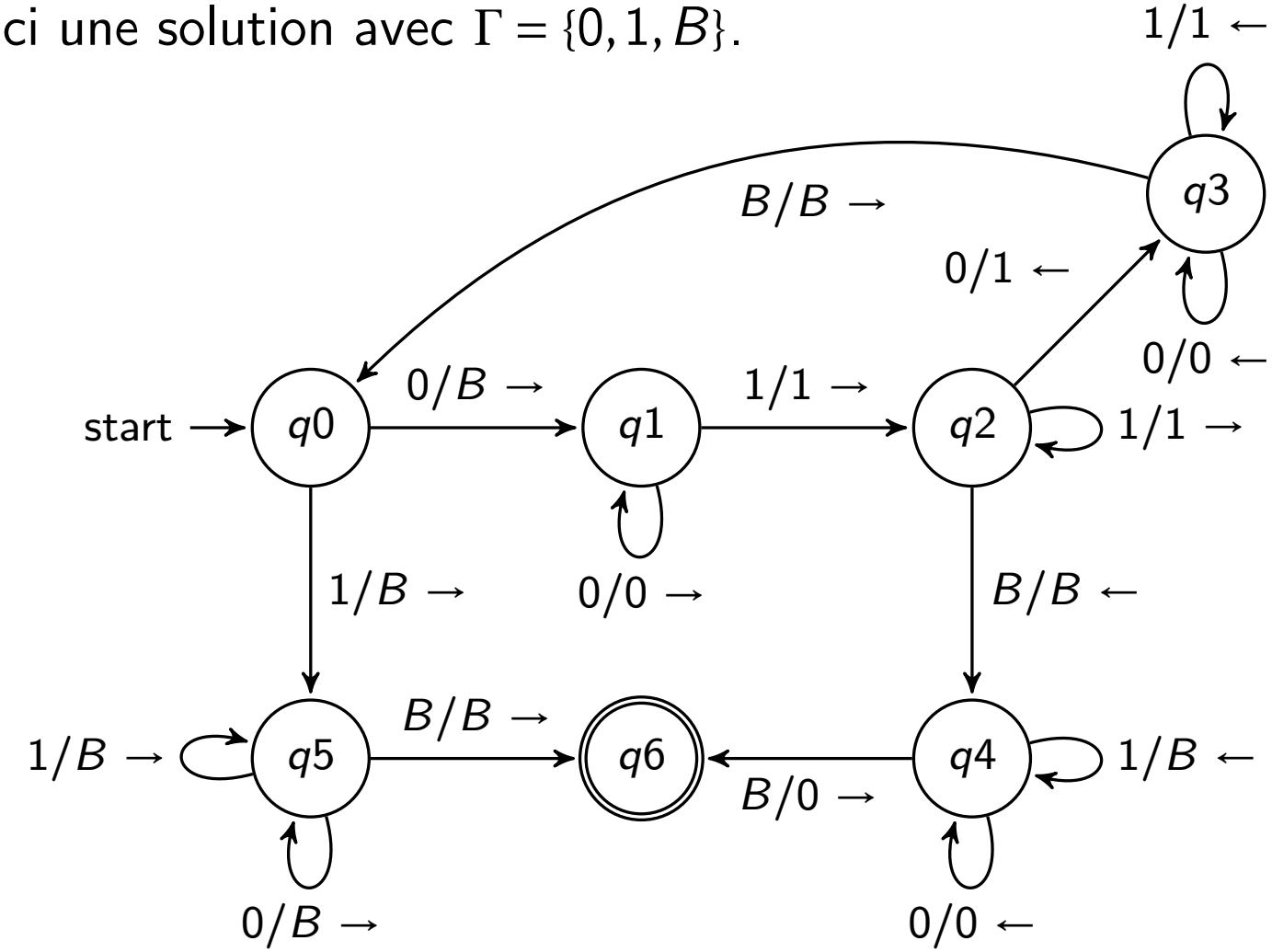
- Idée de la démonstration :

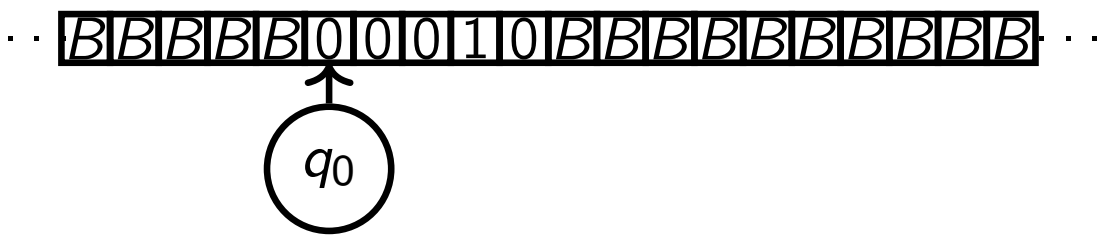


- Le modèle de la machine de Turing peut paraître extrêmement rudimentaire.
- Il n'en demeure pas moins extrêmement puissant, et capable de capturer la notion de *calculable* en informatique.

Soustraction

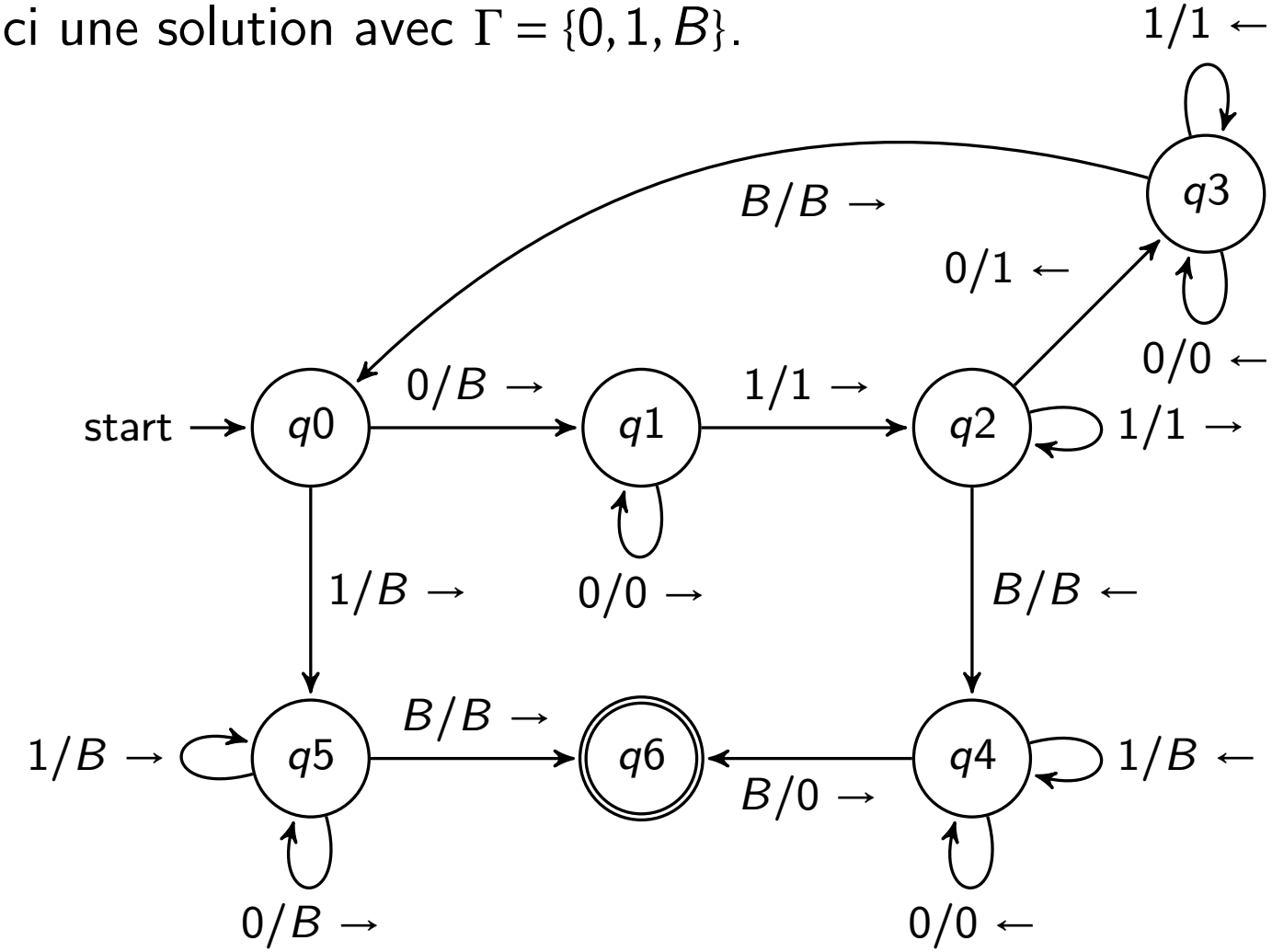
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

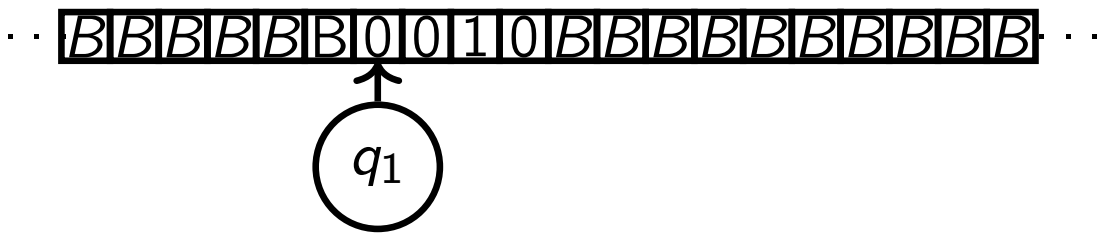




Soustraction

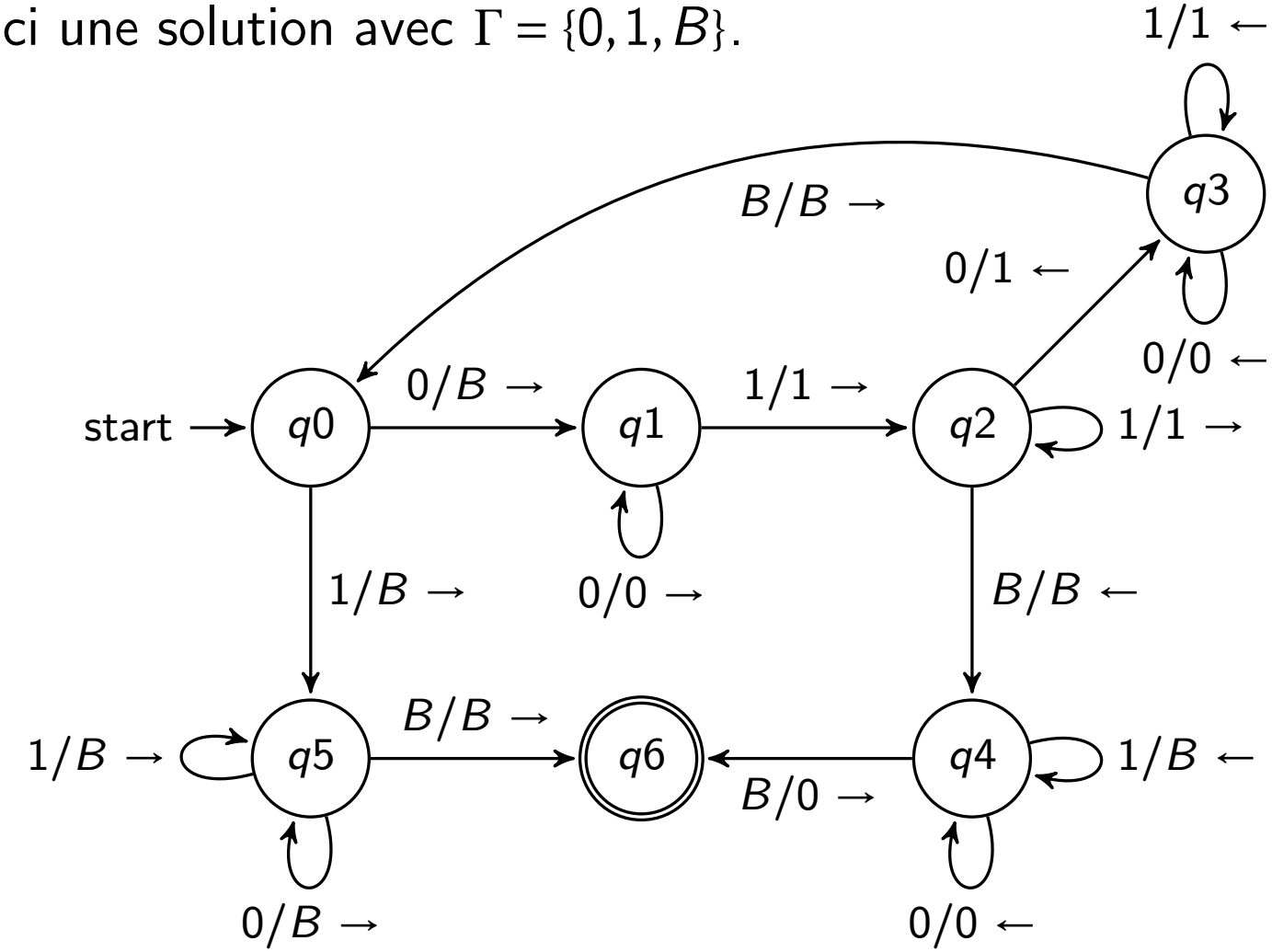
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

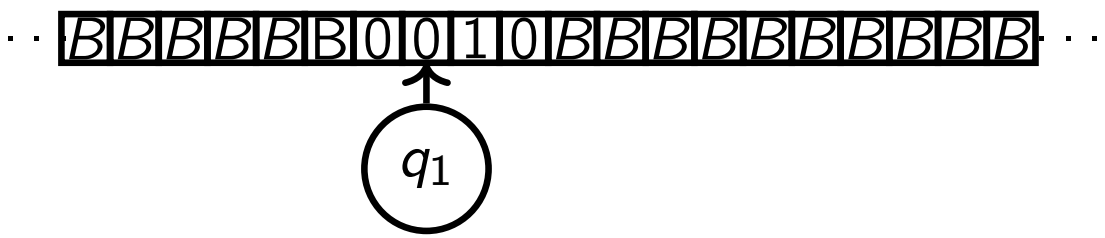




Soustraction

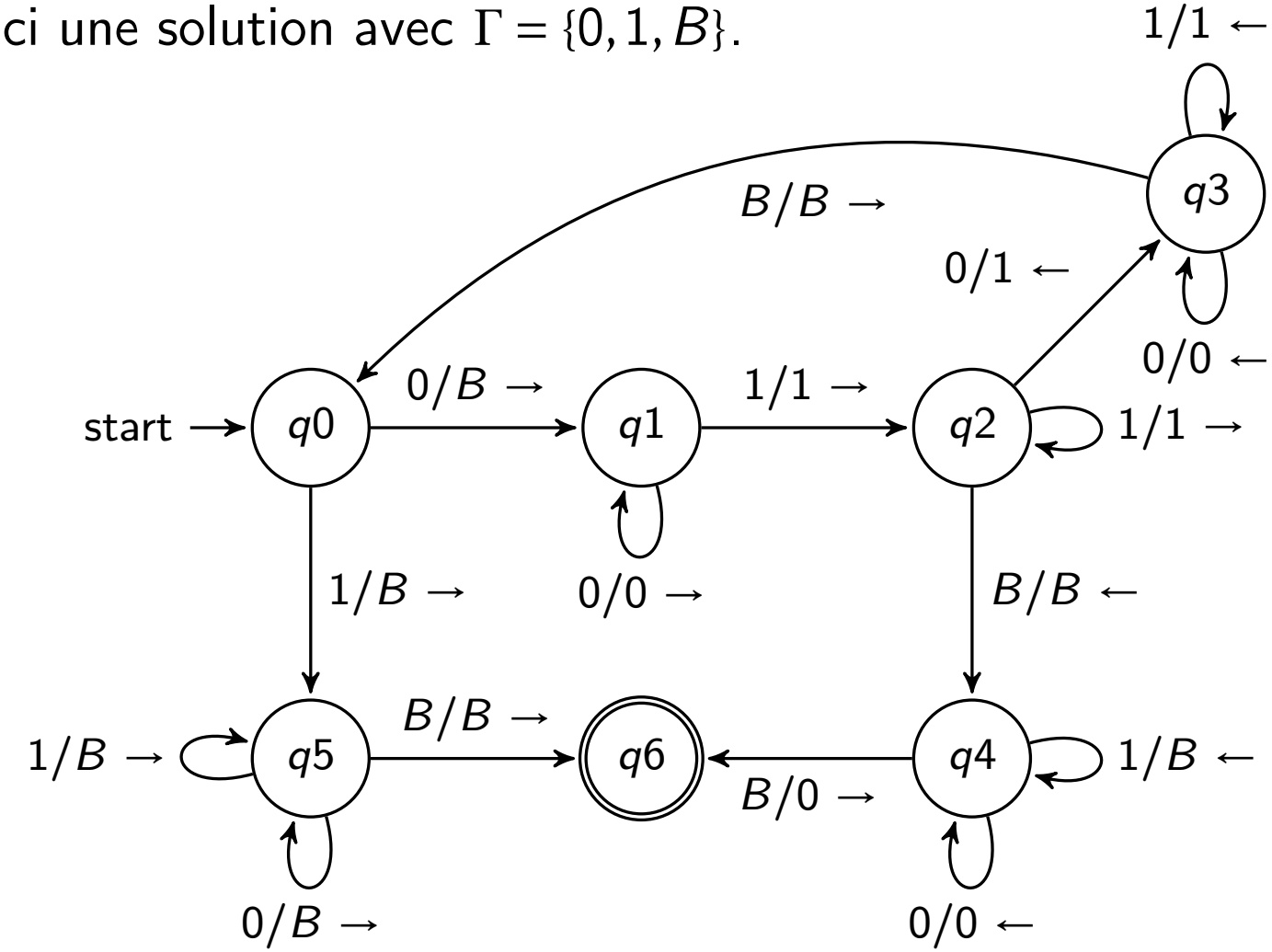
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

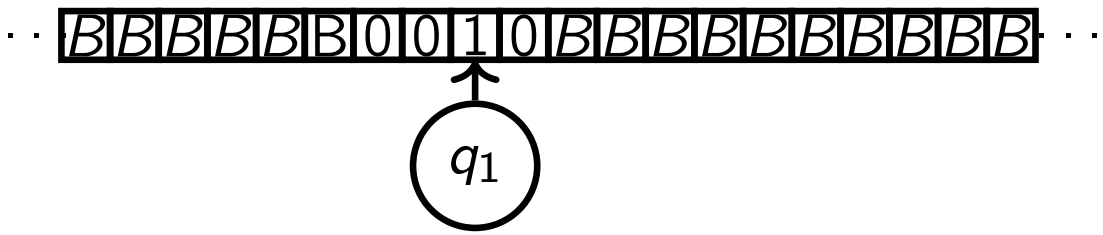




Soustraction

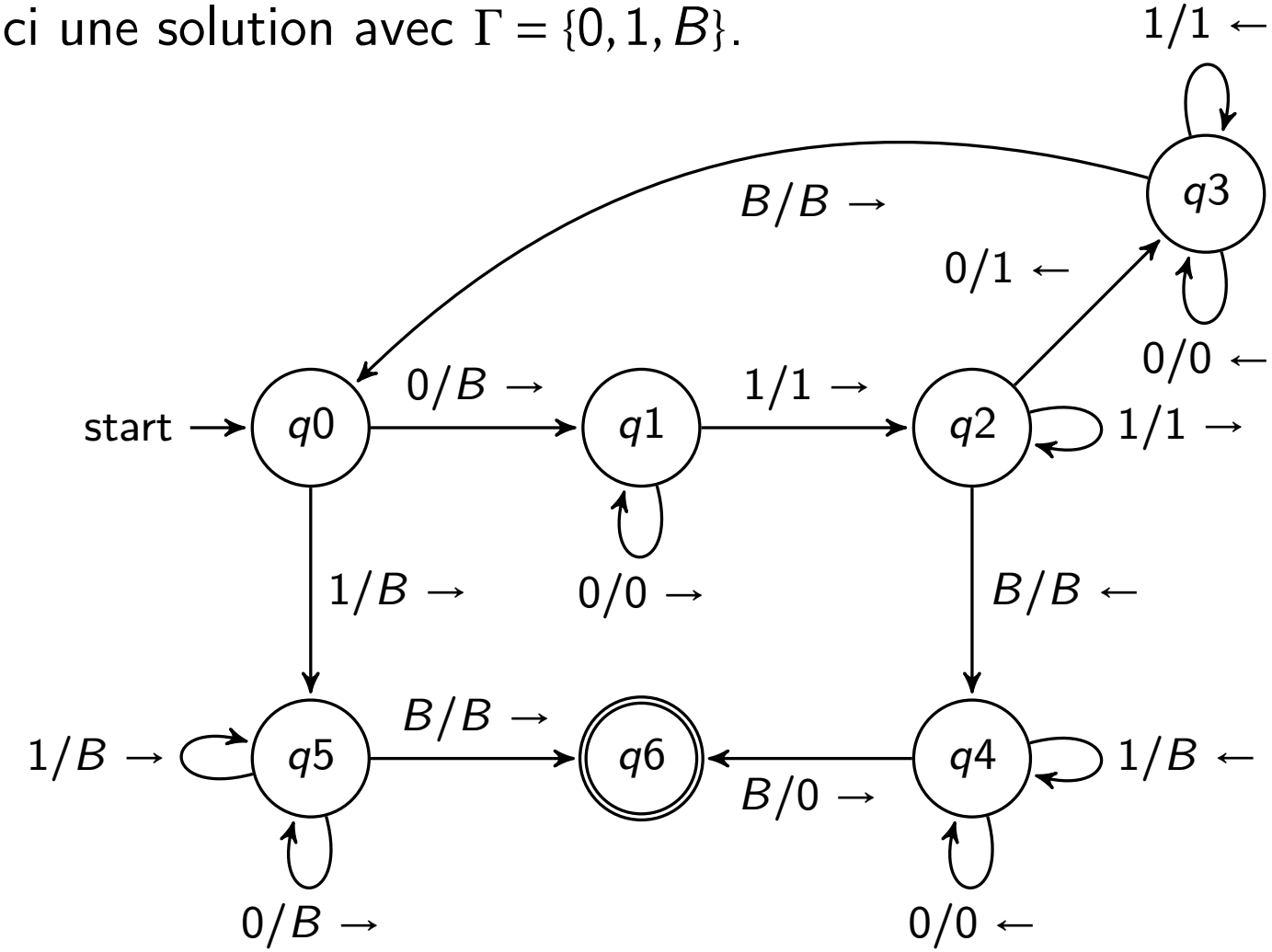
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

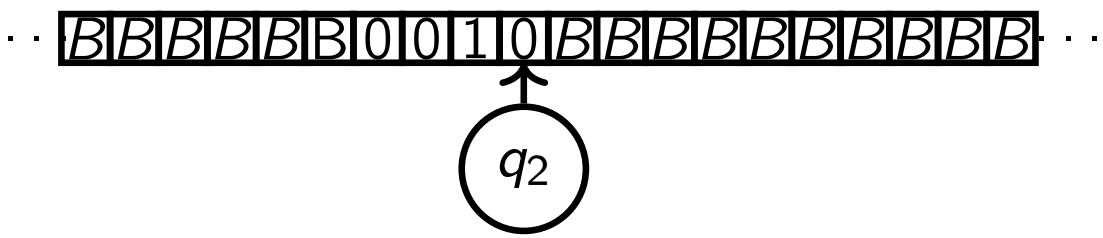




Soustraction

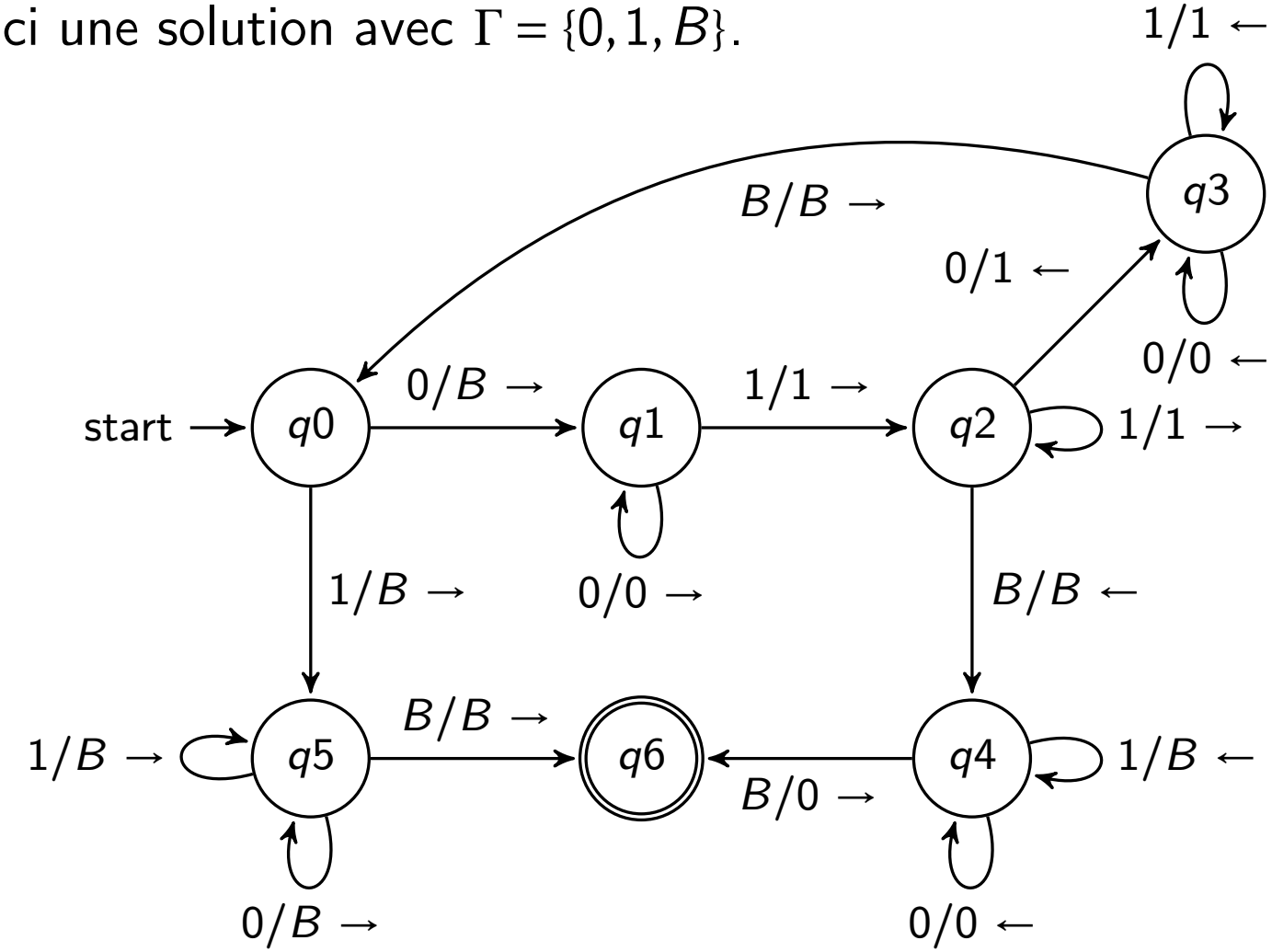
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

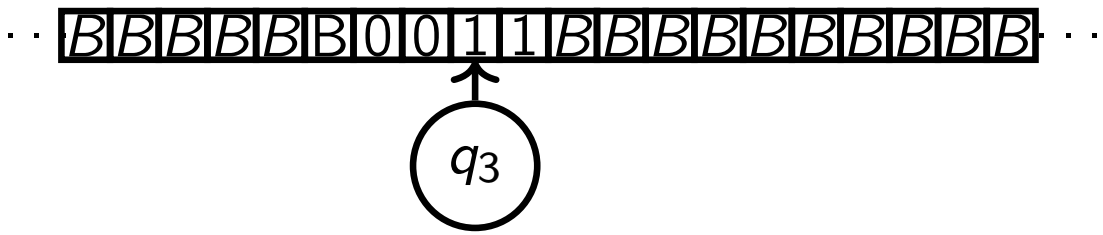




Soustraction

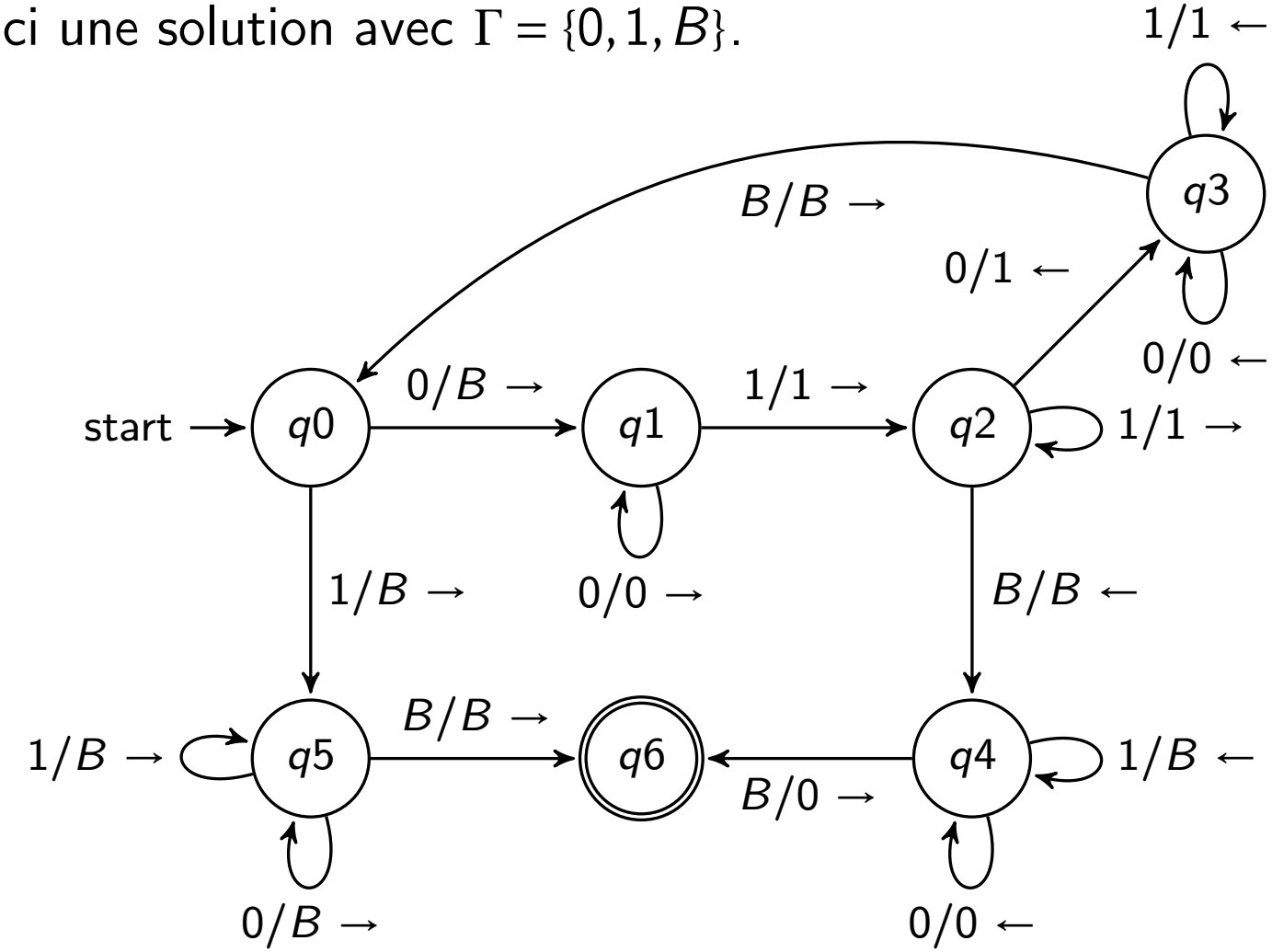
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

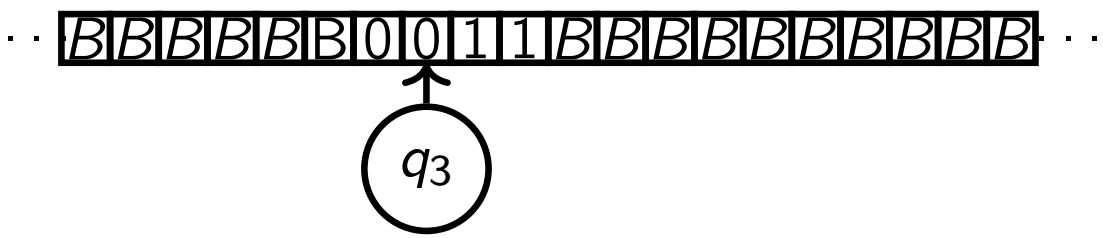




Soustraction

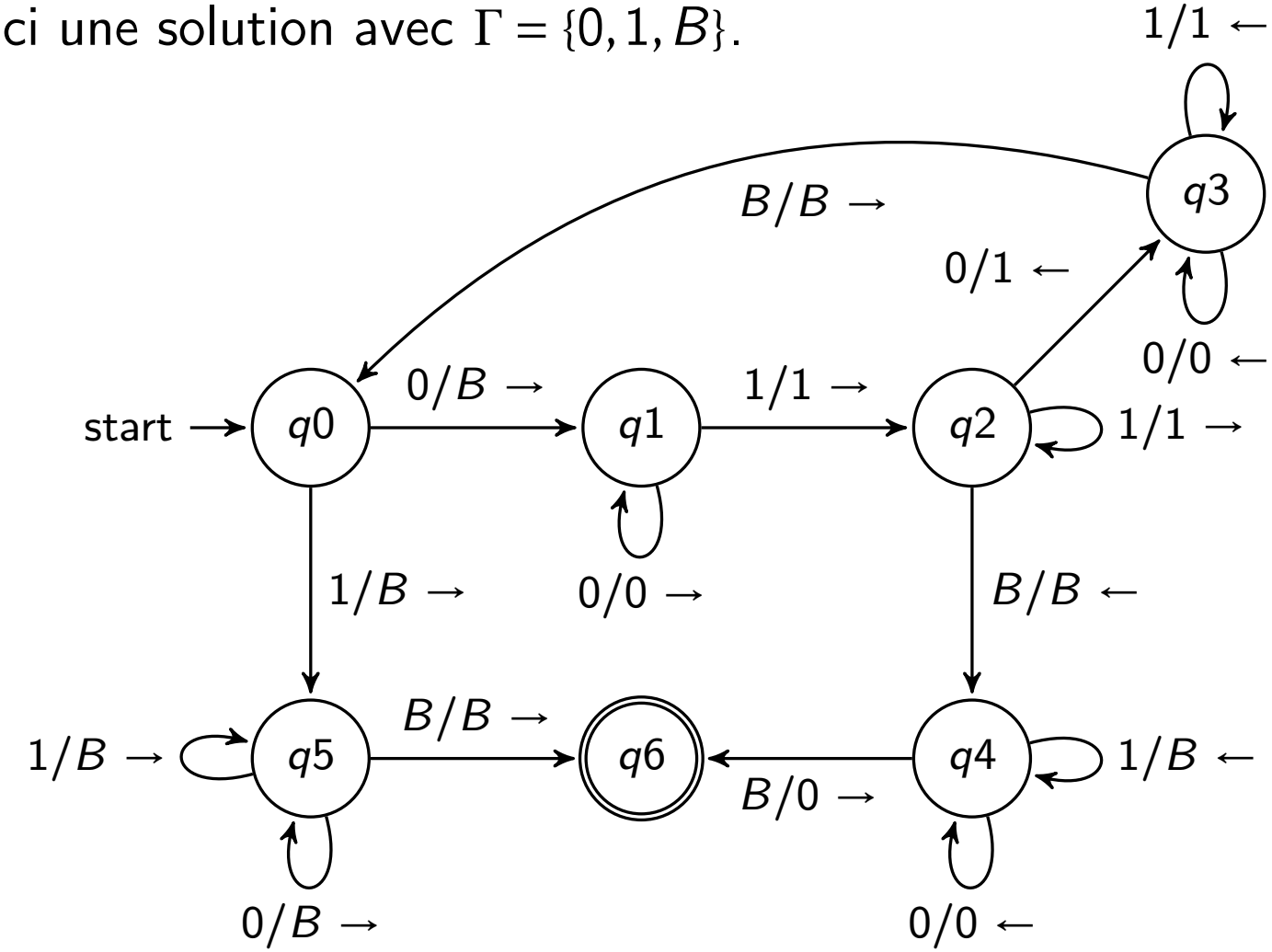
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

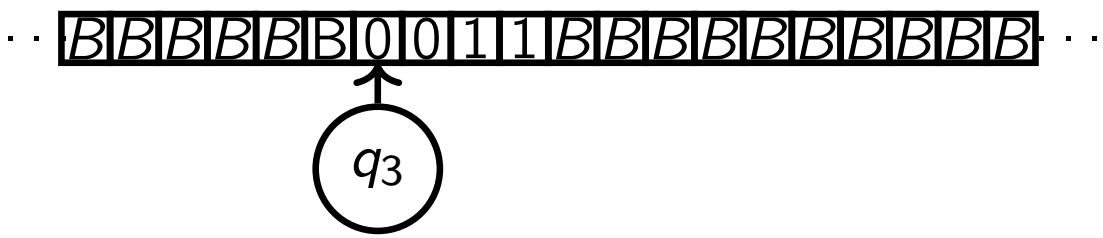




Soustraction

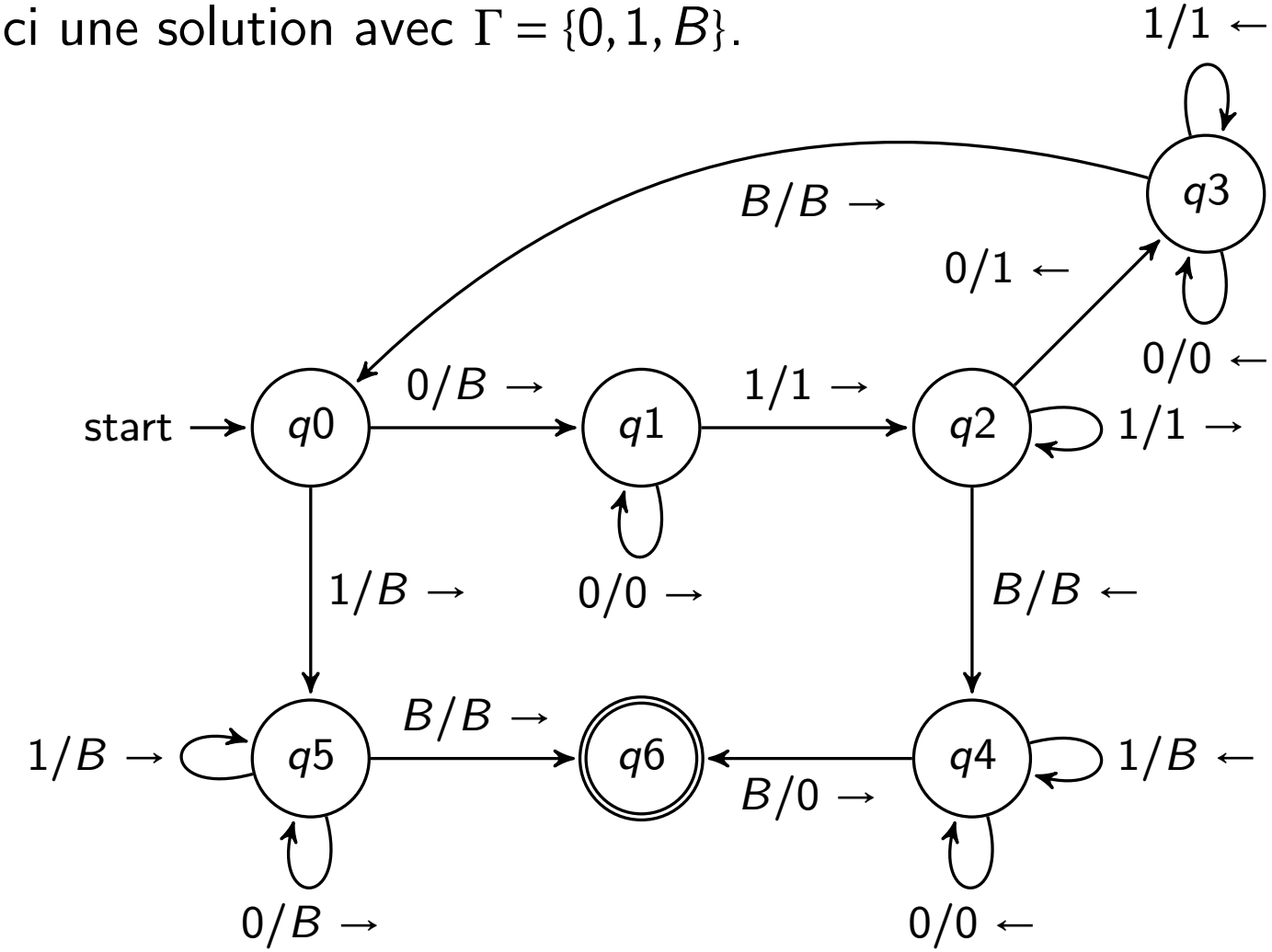
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

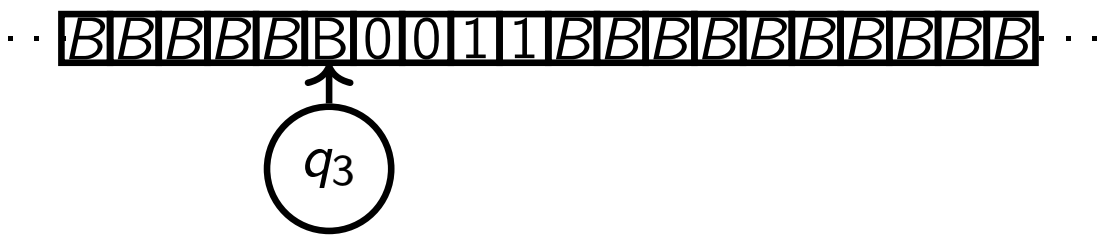




Soustraction

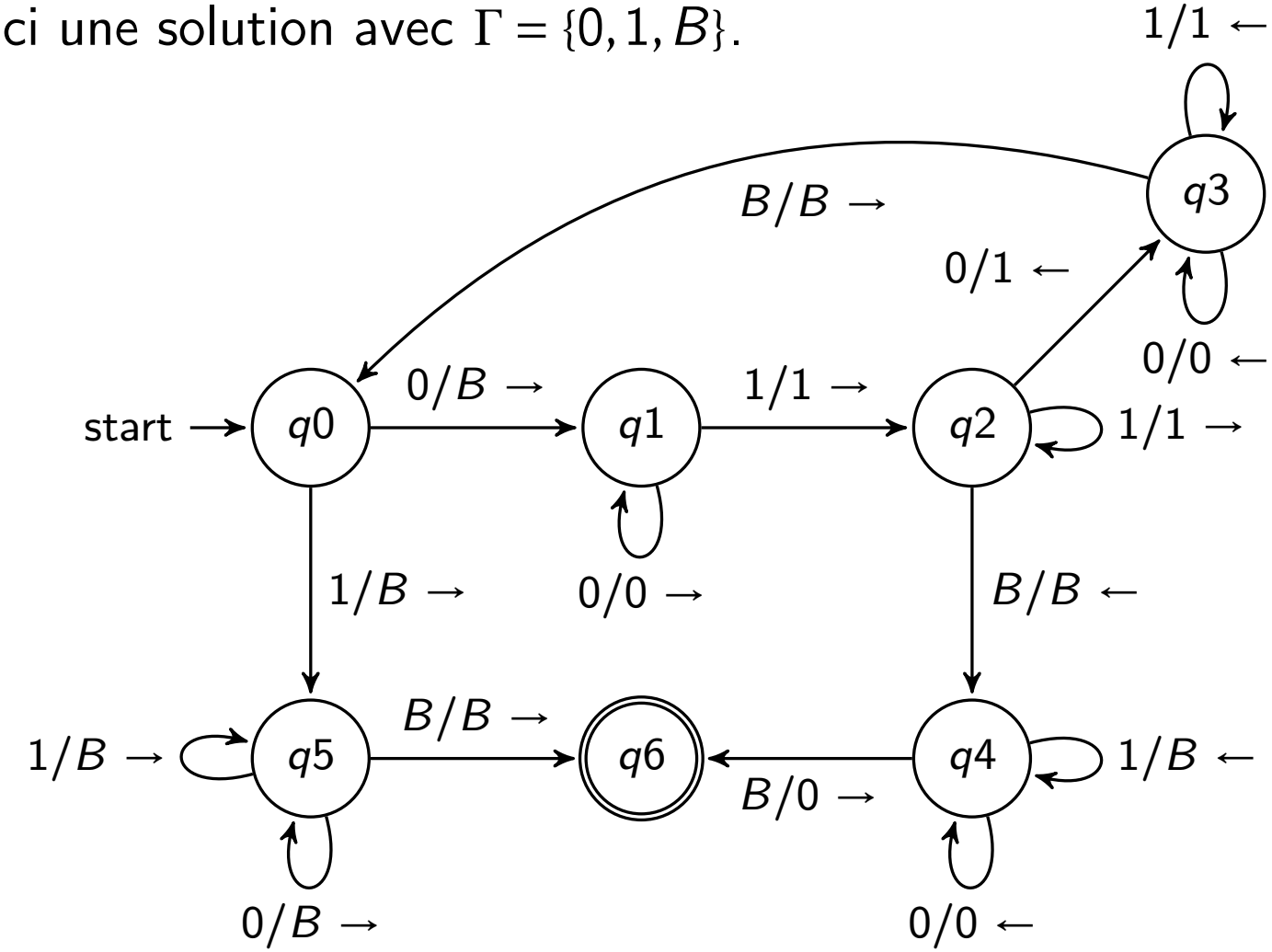
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

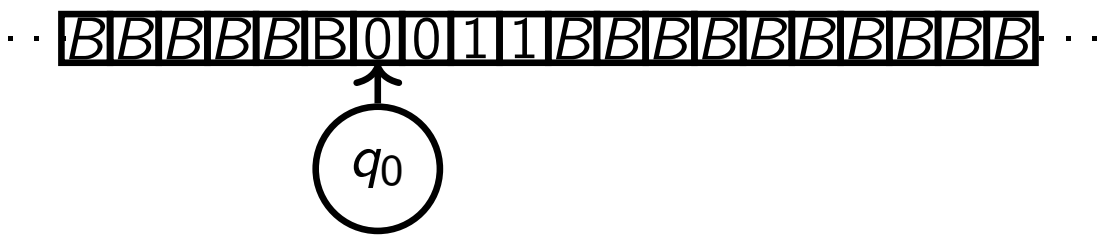




Soustraction

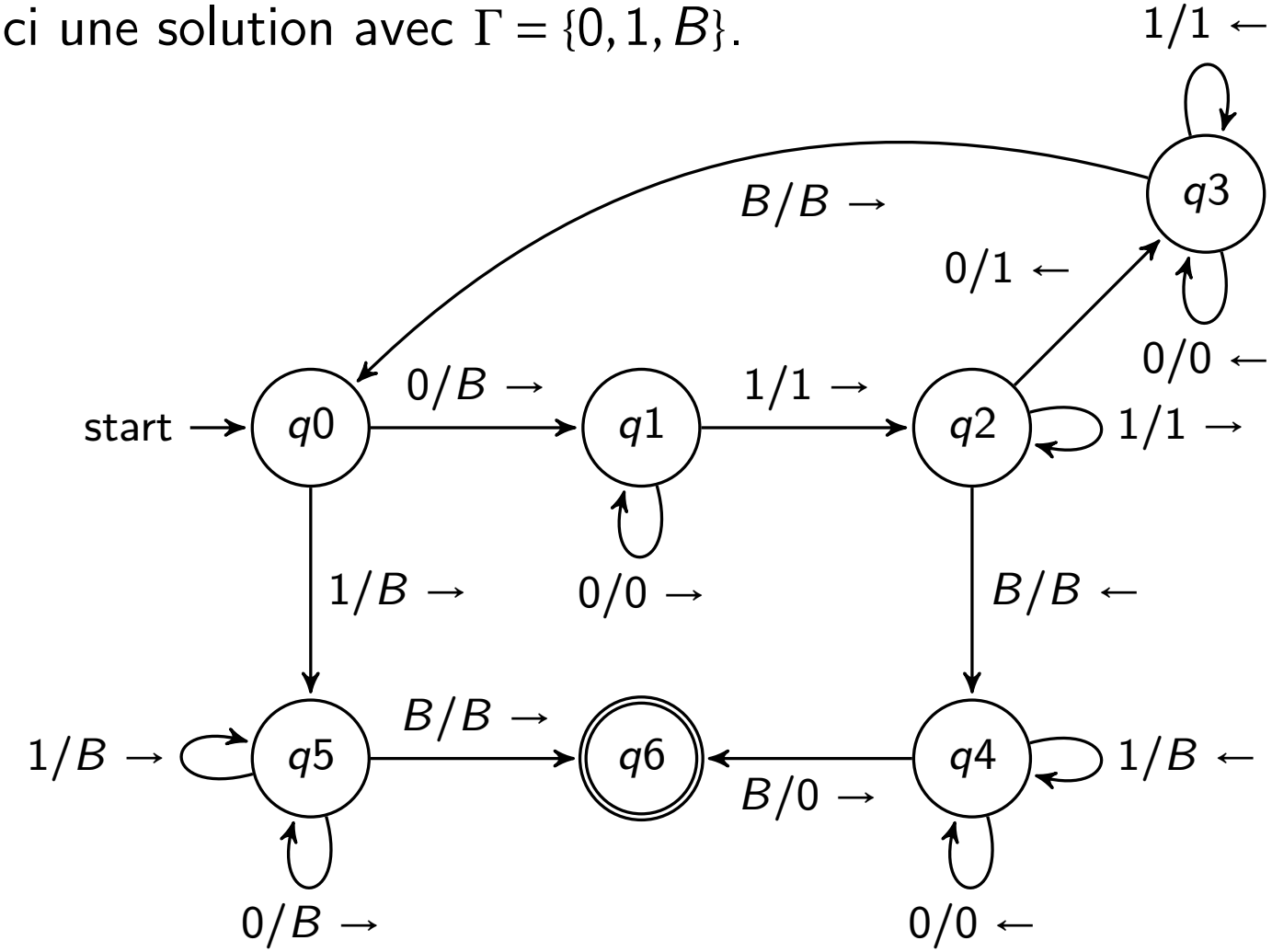
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

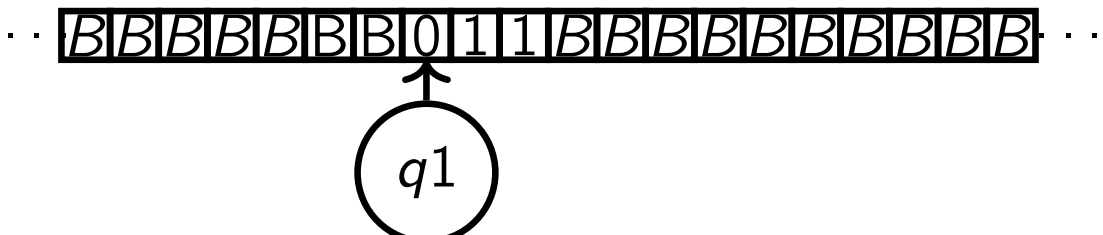




Soustraction

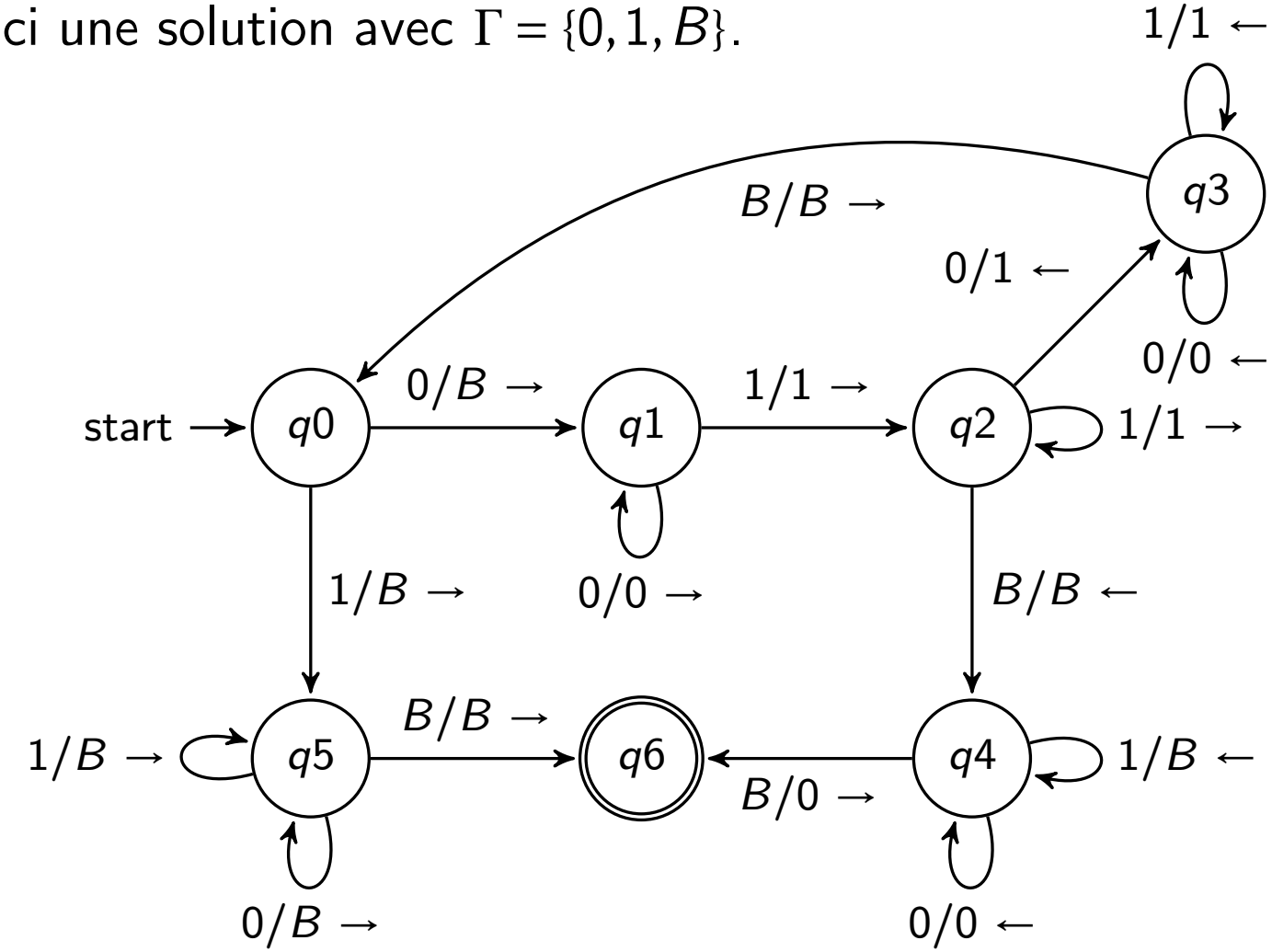
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

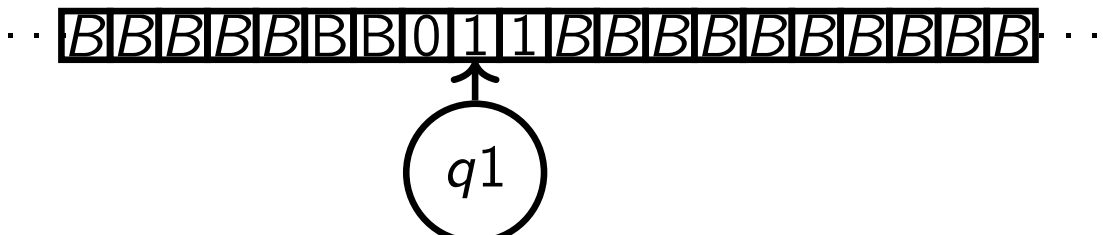




Soustraction

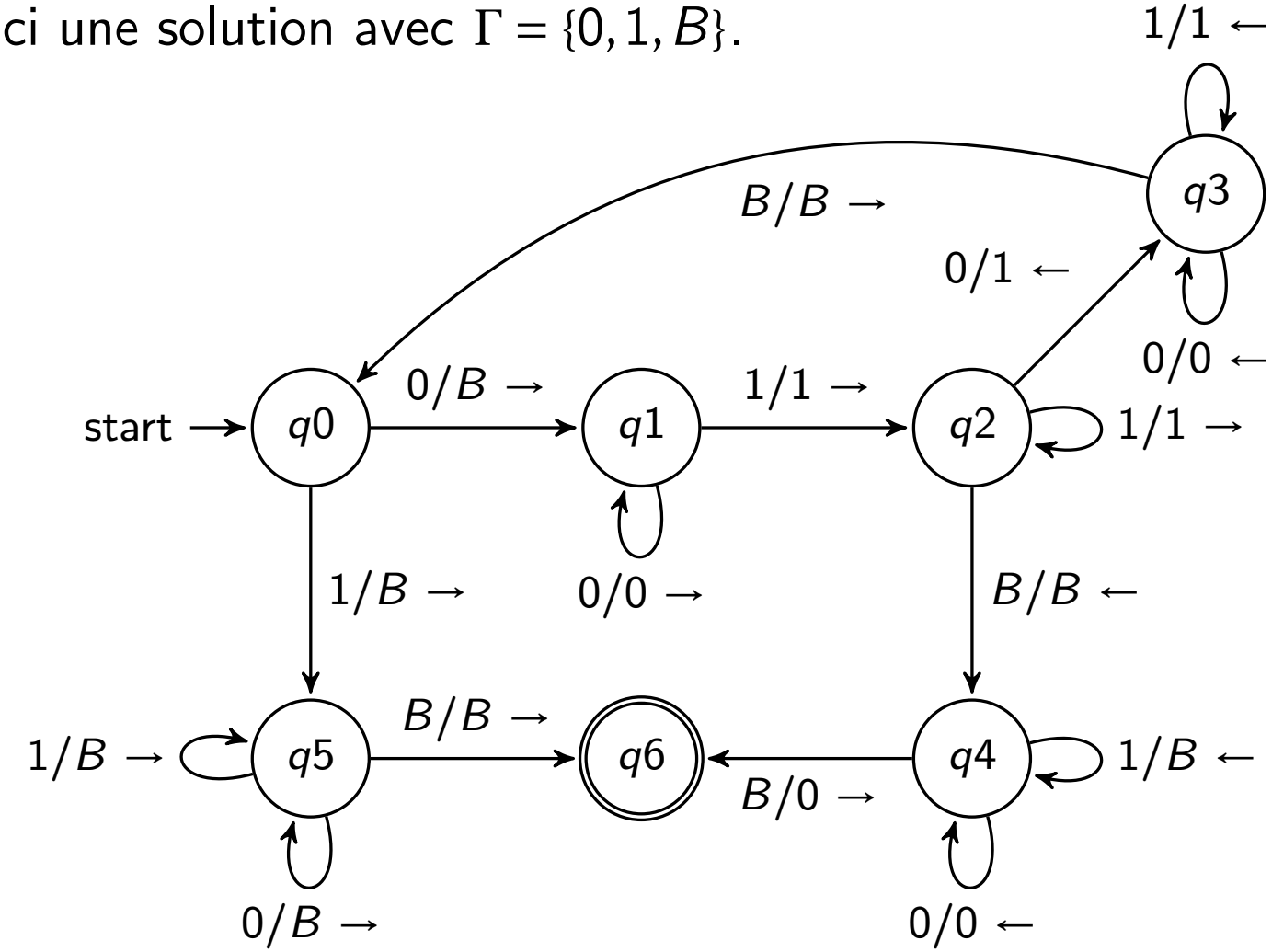
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

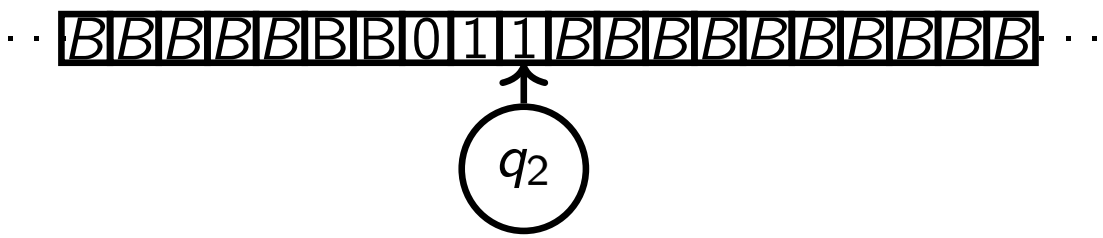




Soustraction

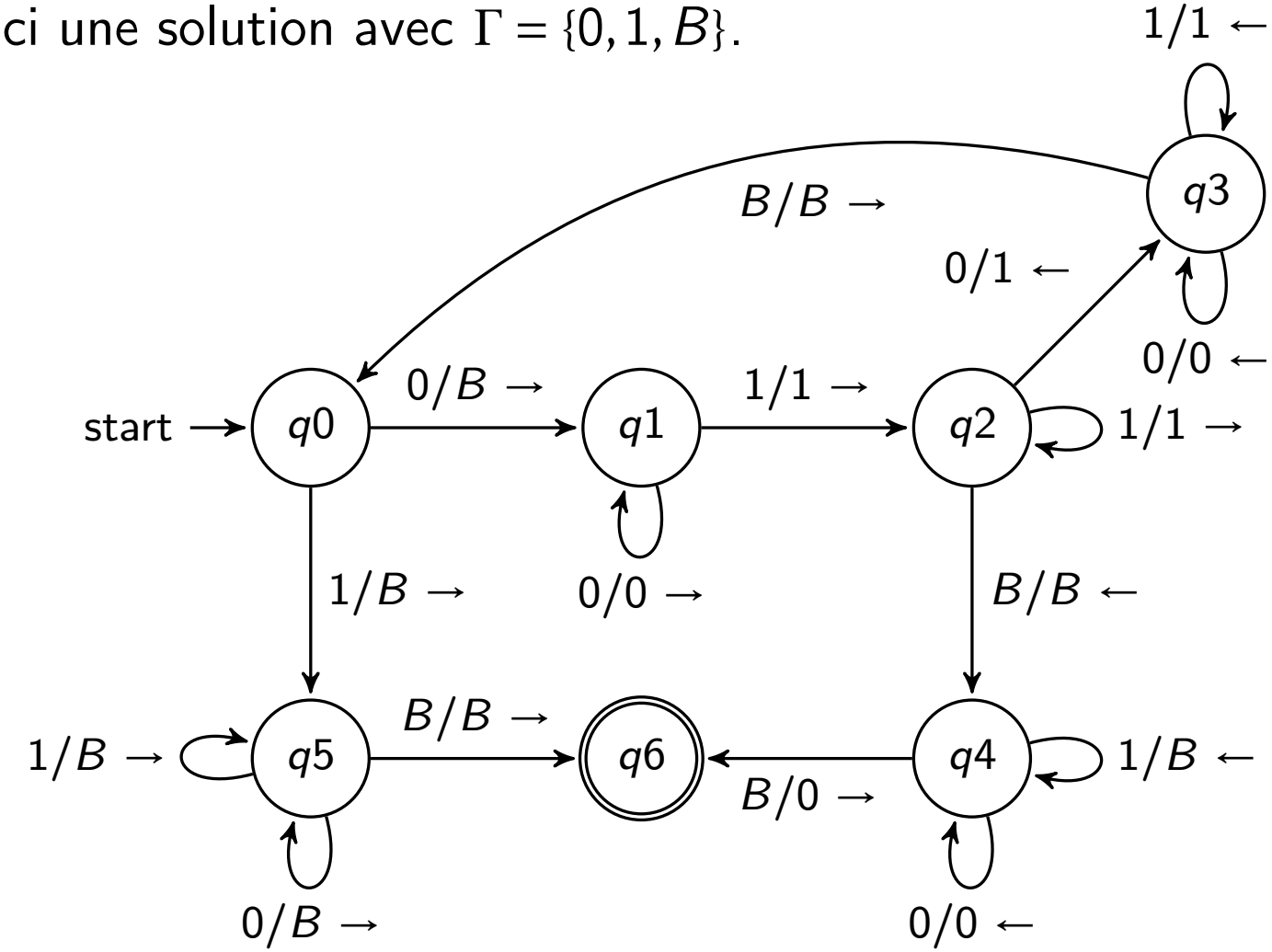
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

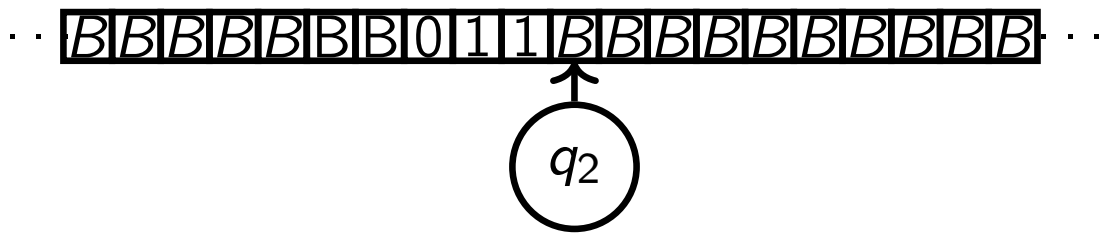




Soustraction

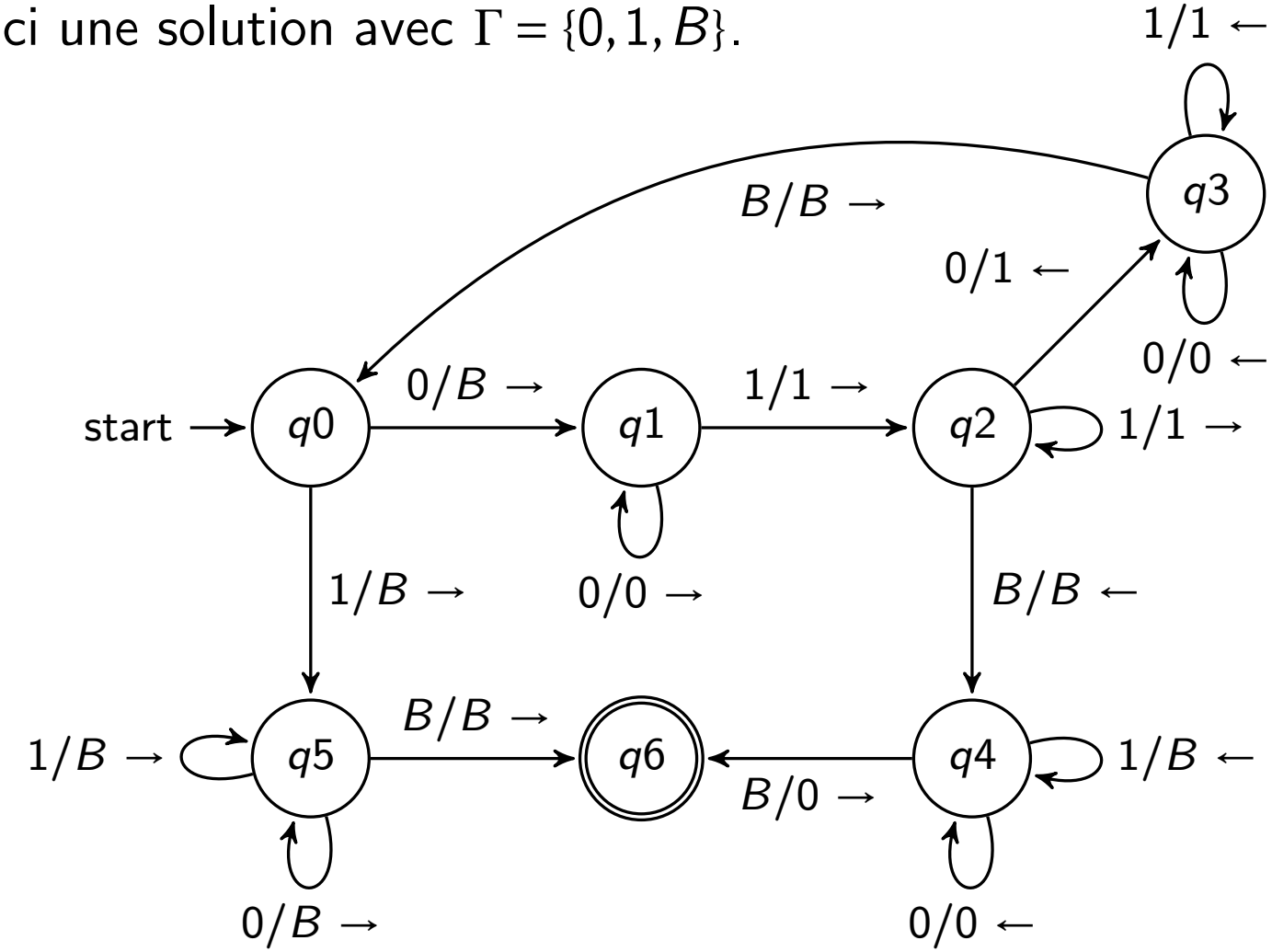
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

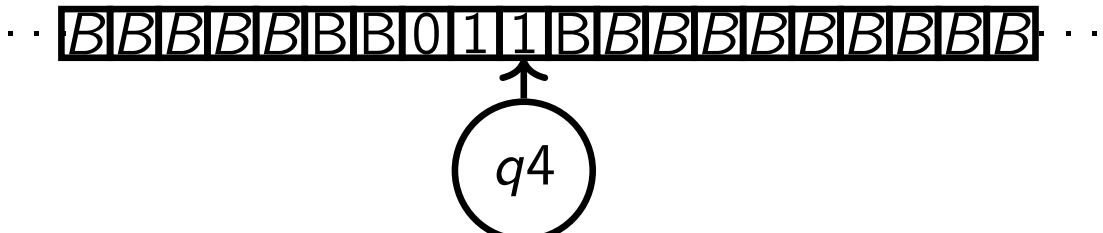




Soustraction

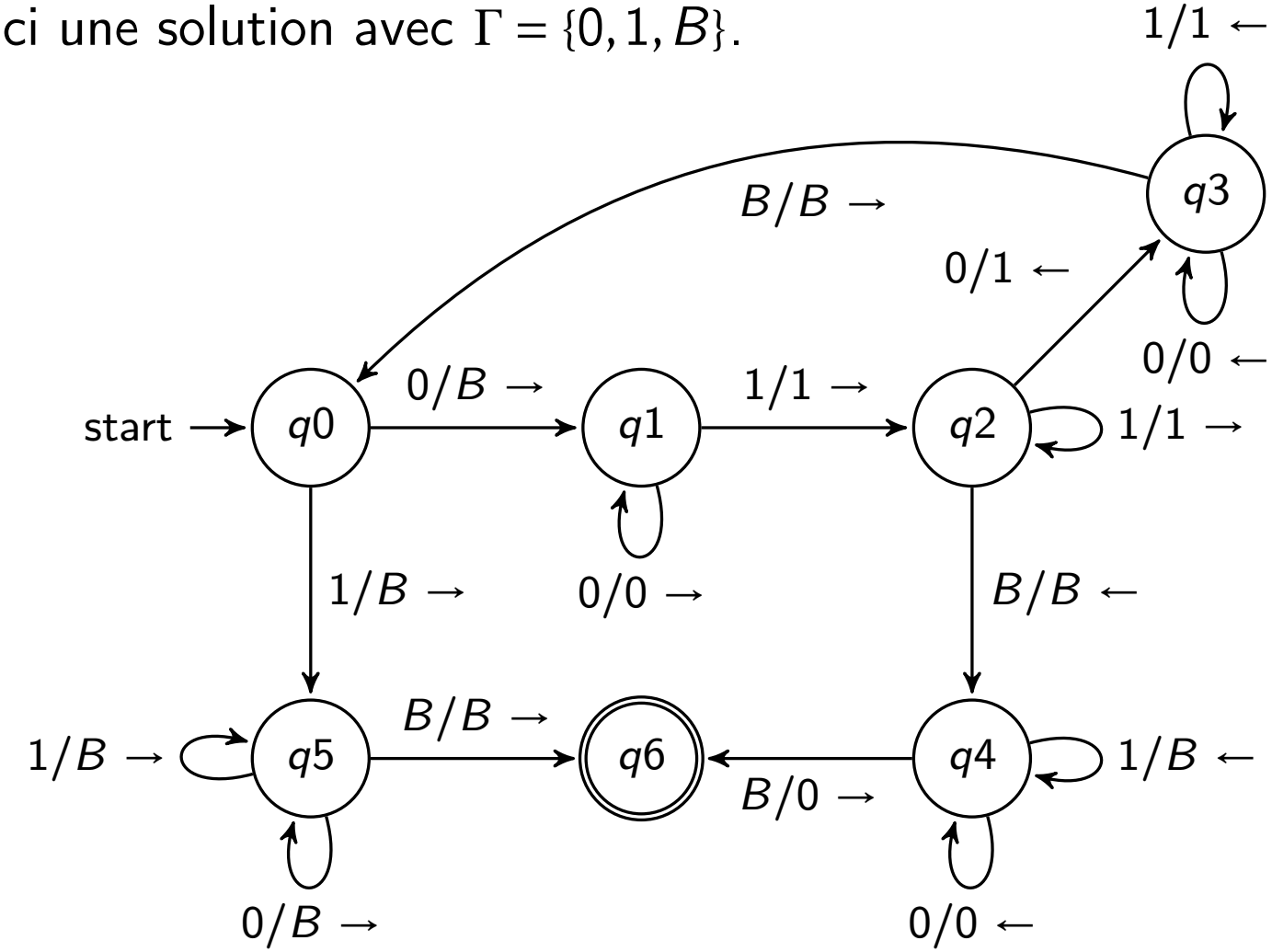
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

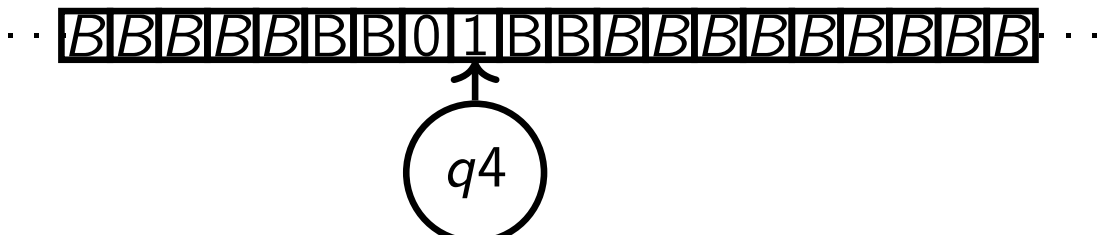




Soustraction

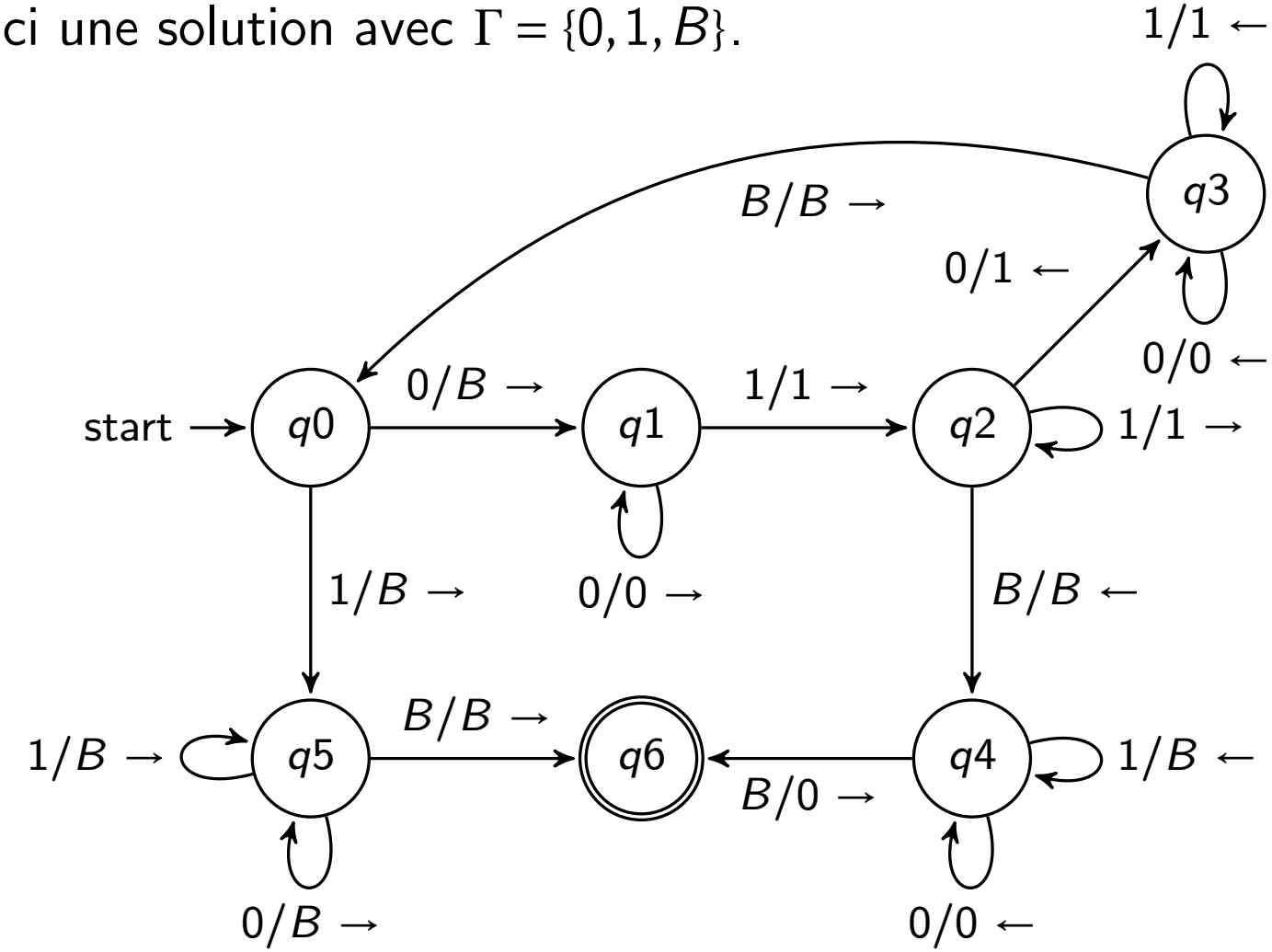
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

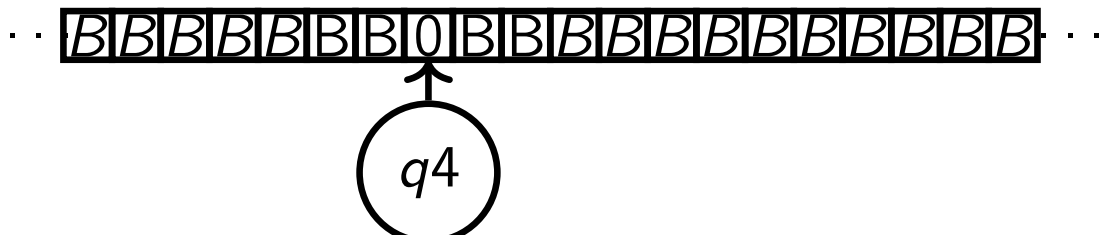




Soustraction

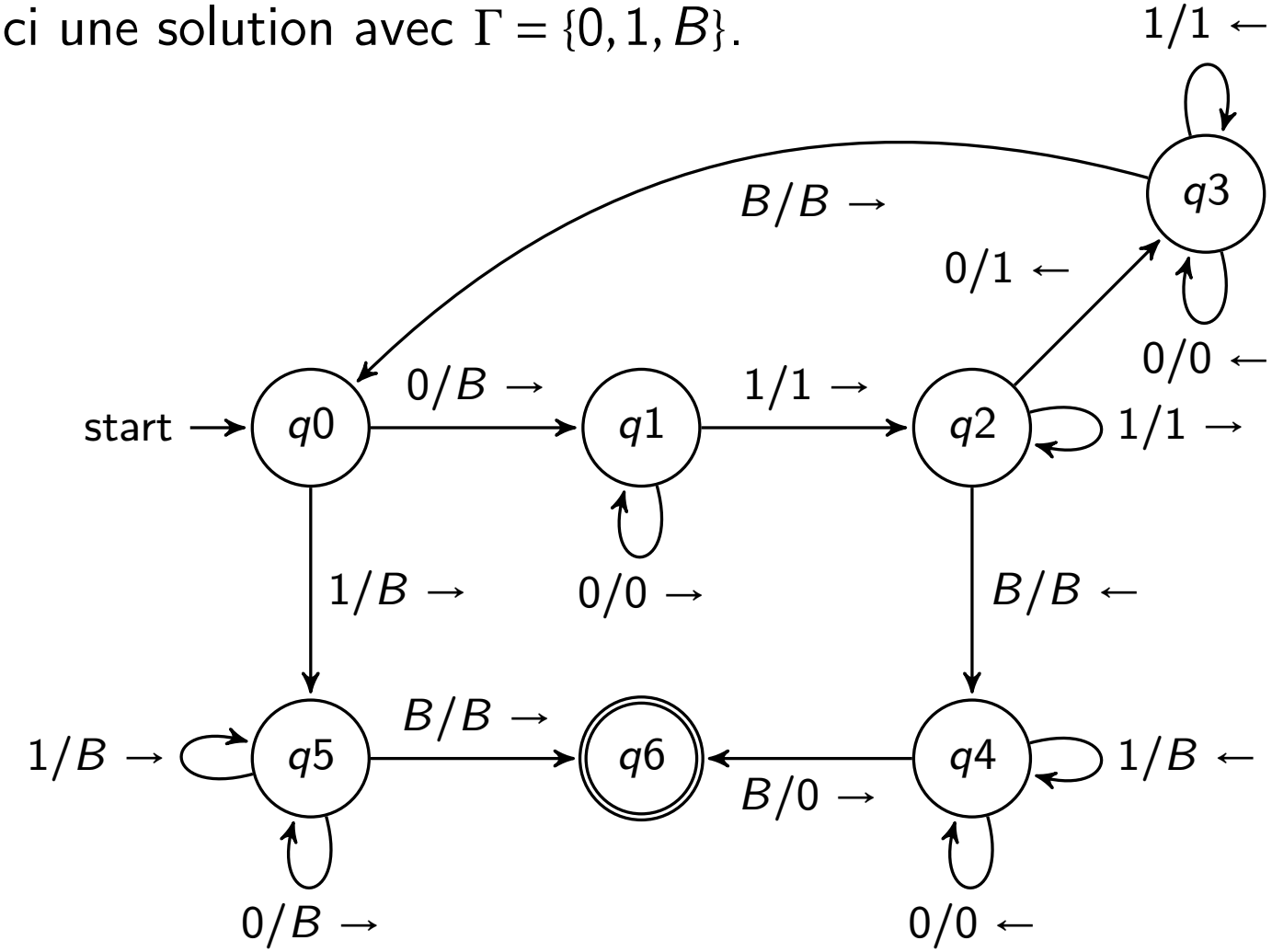
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

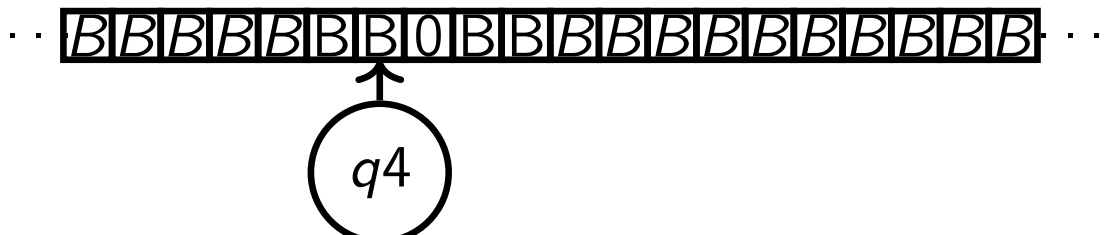




Soustraction

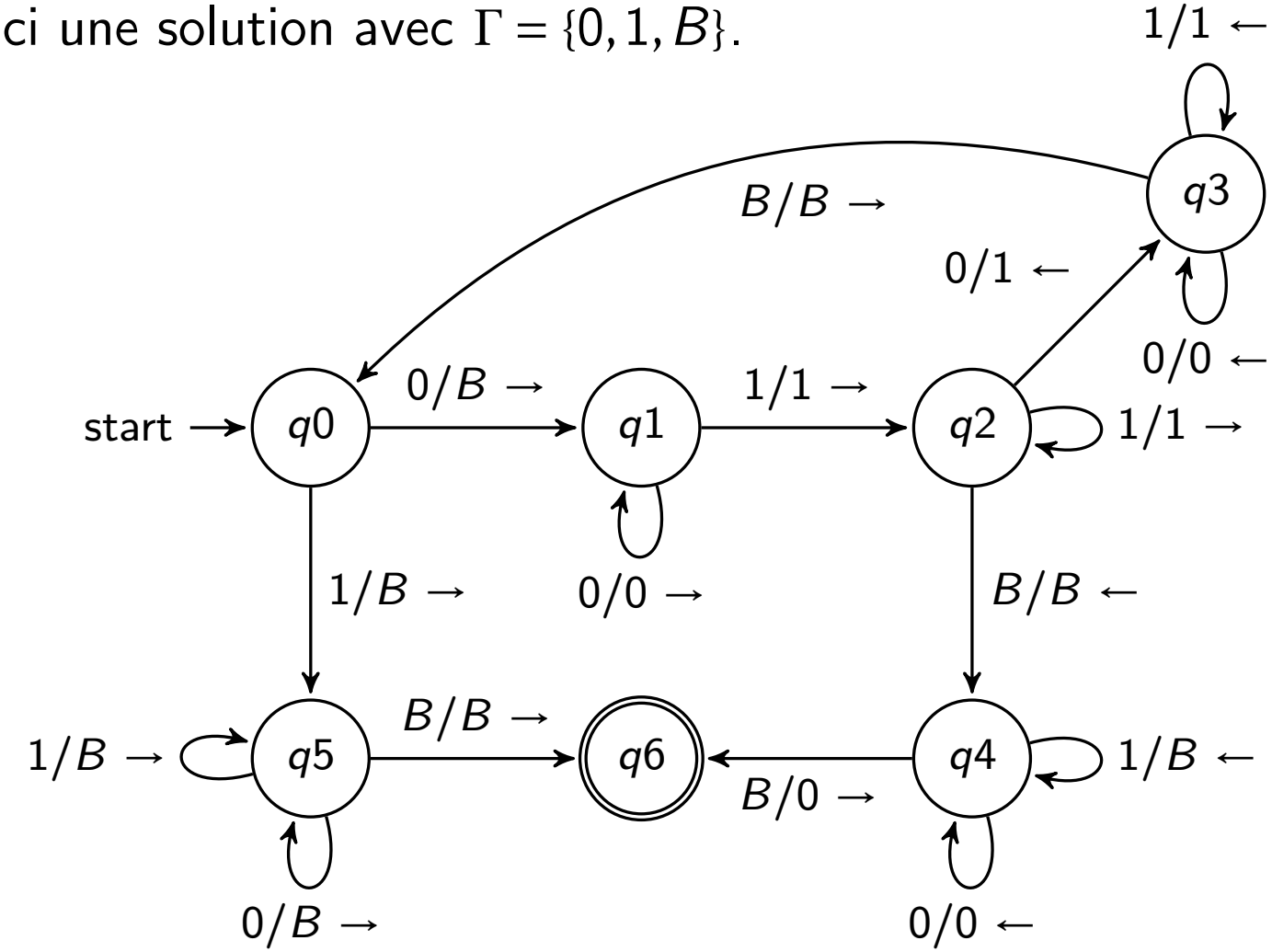
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.

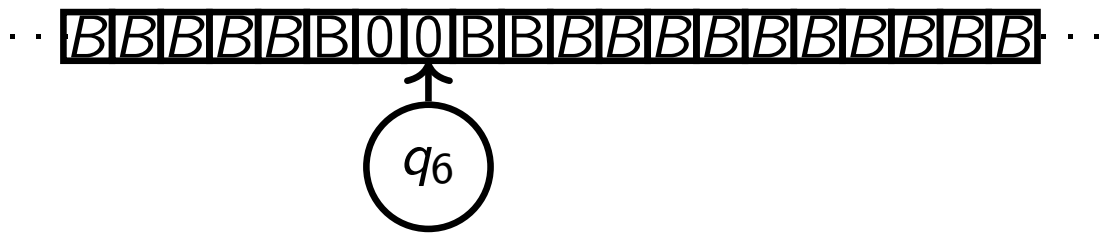




Soustraction

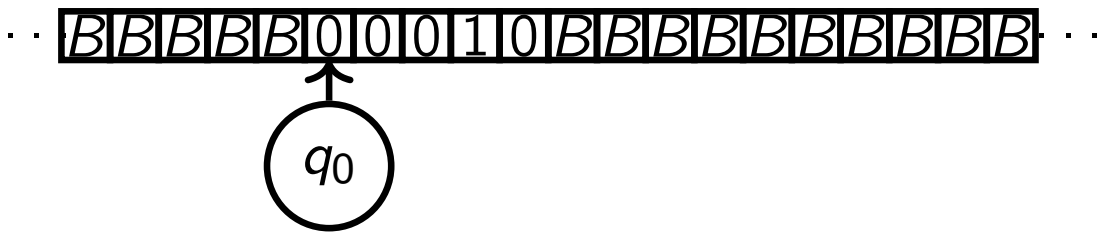
- Voici une solution avec $\Gamma = \{0, 1, B\}$.





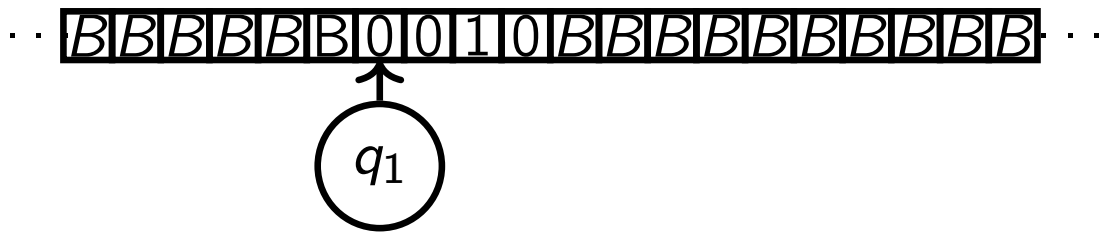
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



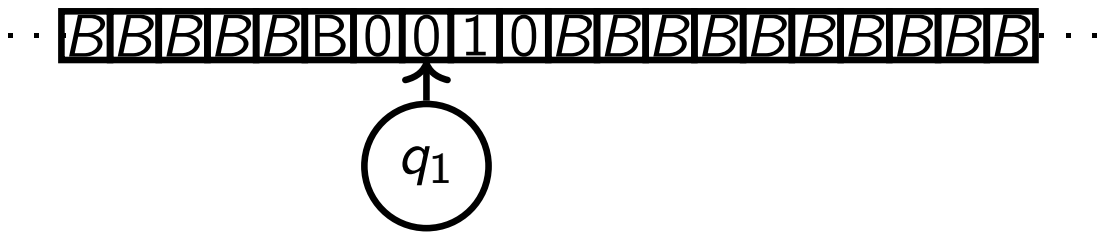
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



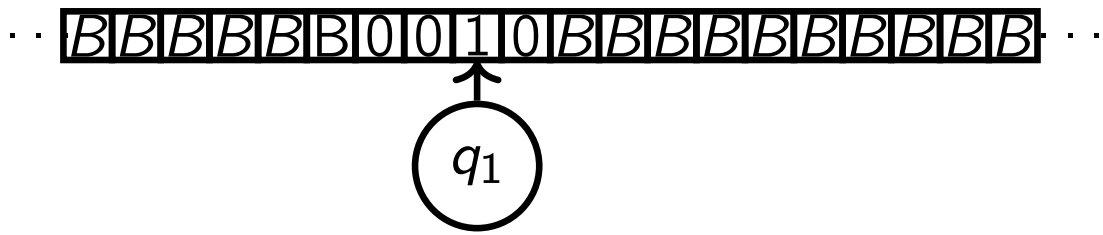
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



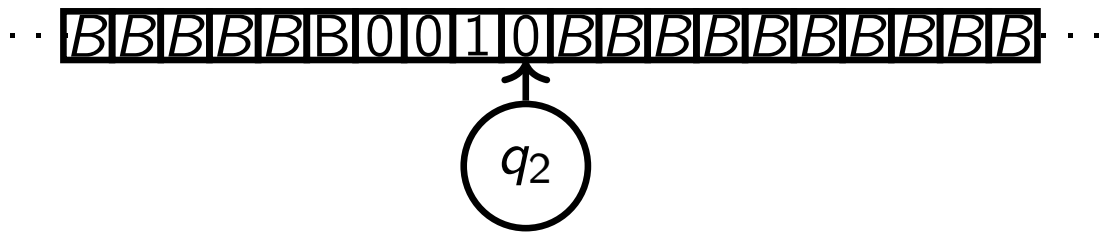
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



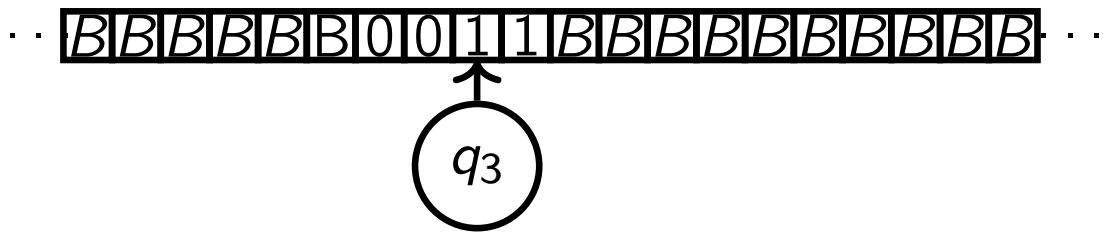
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



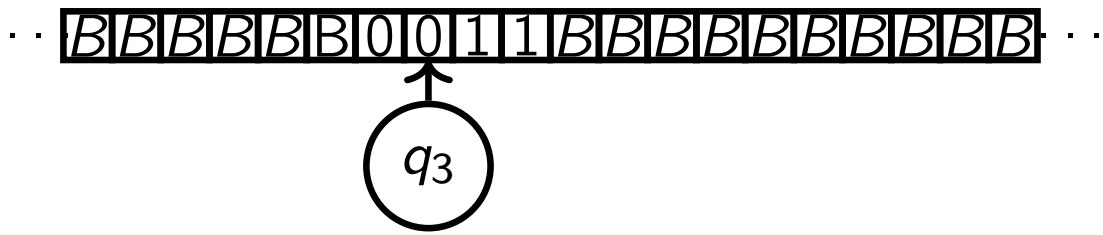
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



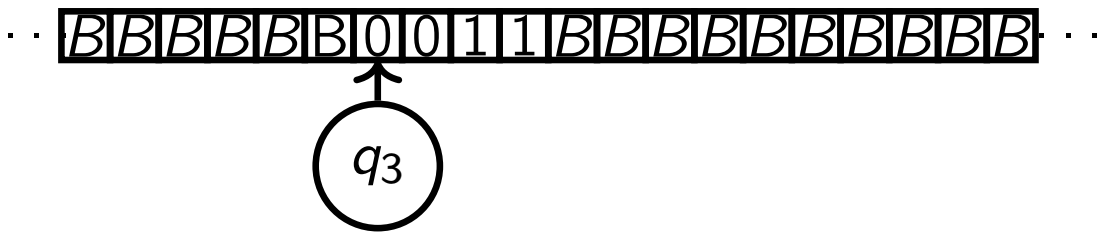
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



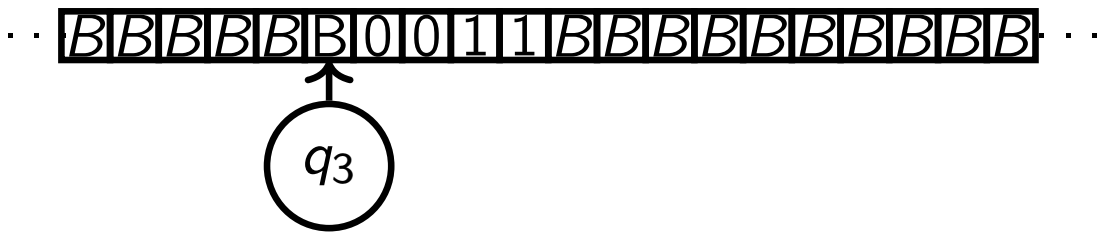
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



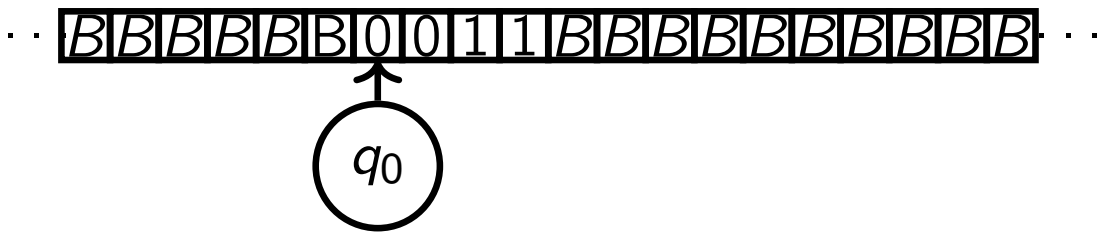
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



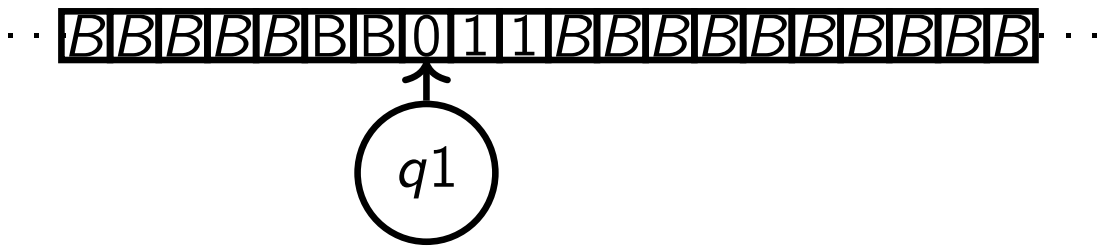
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.

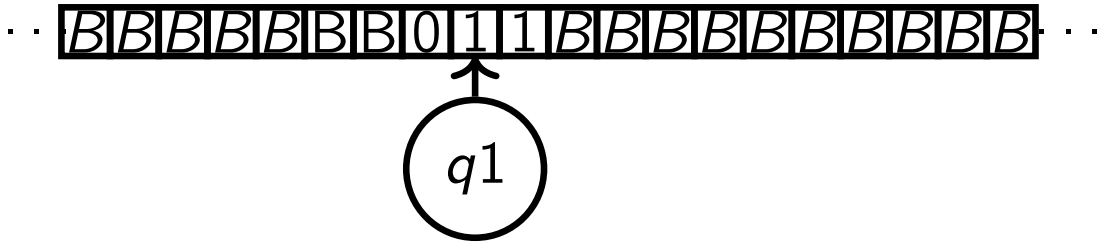


- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.

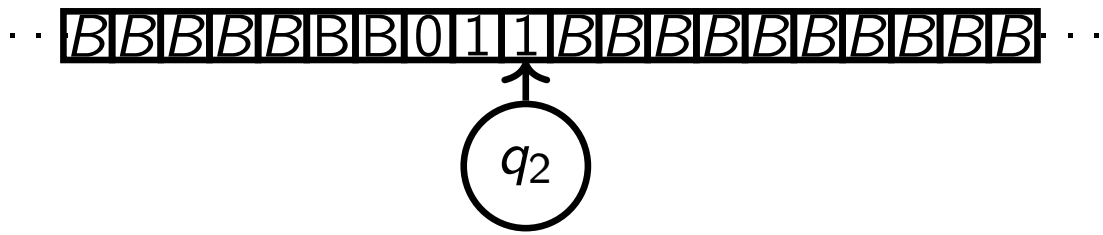


- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.
  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



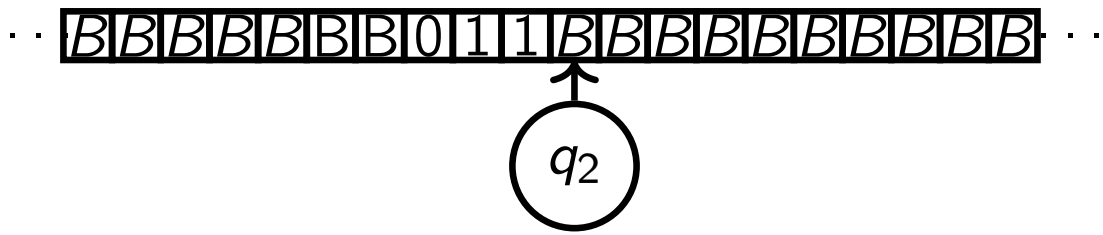
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



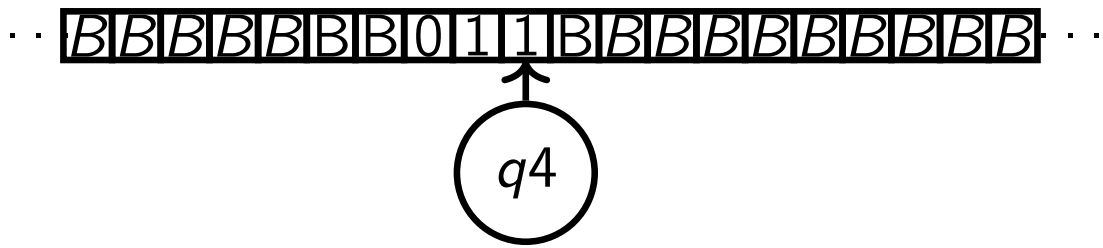
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



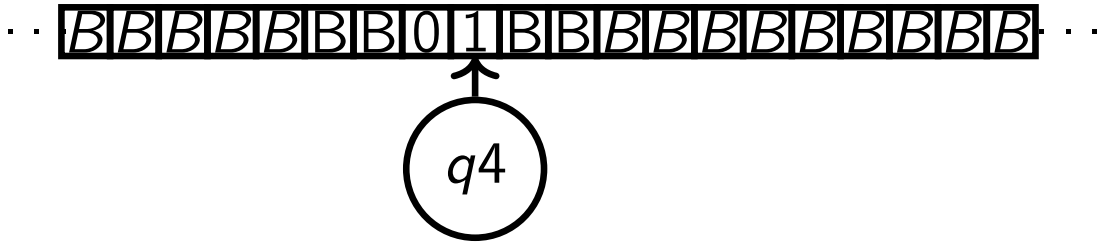
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



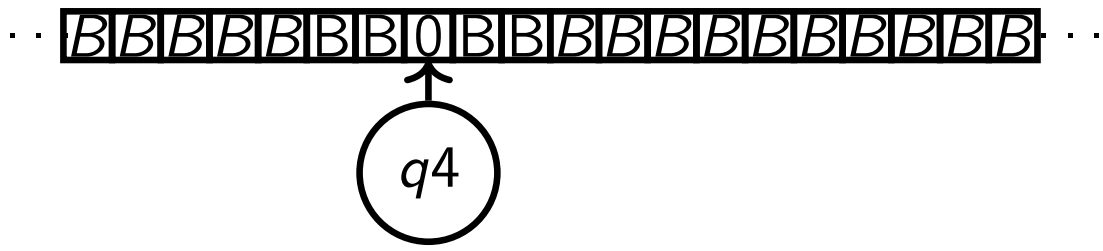
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



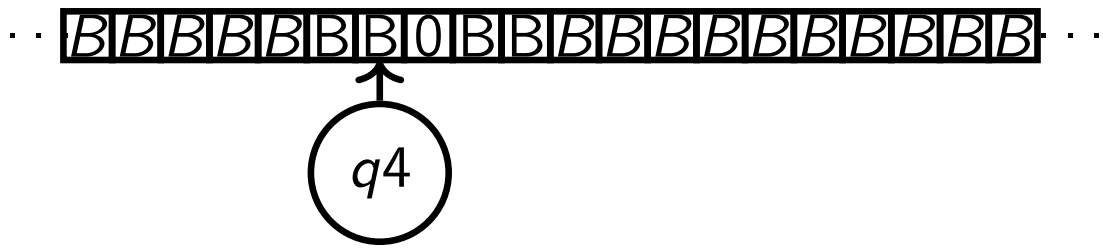
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



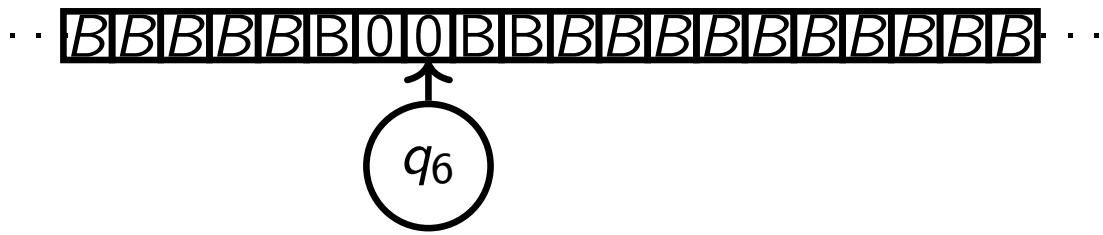
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.



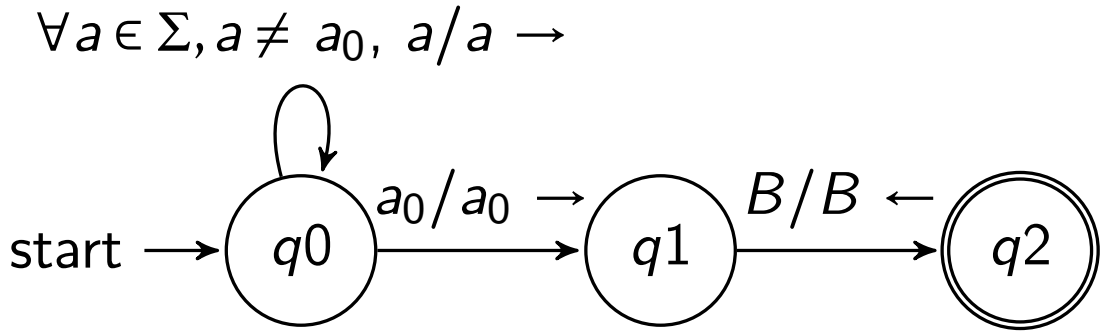
- Principe :
  - La machine recherche le 0 le plus à gauche et le remplace par un blanc. Elle cherche alors à droite un 1, quand elle en trouve un elle continue à droite jusqu'à trouver un 0 qu'elle remplace par un 1. La machine retourne alors à gauche pour trouver le 0 le plus à gauche qu'elle identifie en trouvant le premier blanc en se déplaçant à gauche et en se déplaçant depuis ce blanc d'une case vers la droite.

  - On répète le processus jusqu'à ce que :
    - soit en cherchant à droite un 0, on rencontre un blanc. Alors les n 0 dans 0^m10^n ont été changés en 1 et $n+1$ des m 0 ont été changés en B. Dans ce cas, la machine remplace les $n+1$ 1 par un 0 et n blancs, ce qui laisse $m-n$ 0 sur le ruban. Puisque dans ce cas, $m \geq n$, $m \ominus n = m-n$.
    - ou en recommençant le cycle, la machine n'arrive pas à trouver un 0 à changer en blanc, puisque les m premiers 0 ont déjà été changés en B. Alors $n \geq m$, et donc $m \ominus n = 0$. La machine remplace alors tous les 1 et 0 restants par des blancs, et termine avec un ruban complètement blanc.

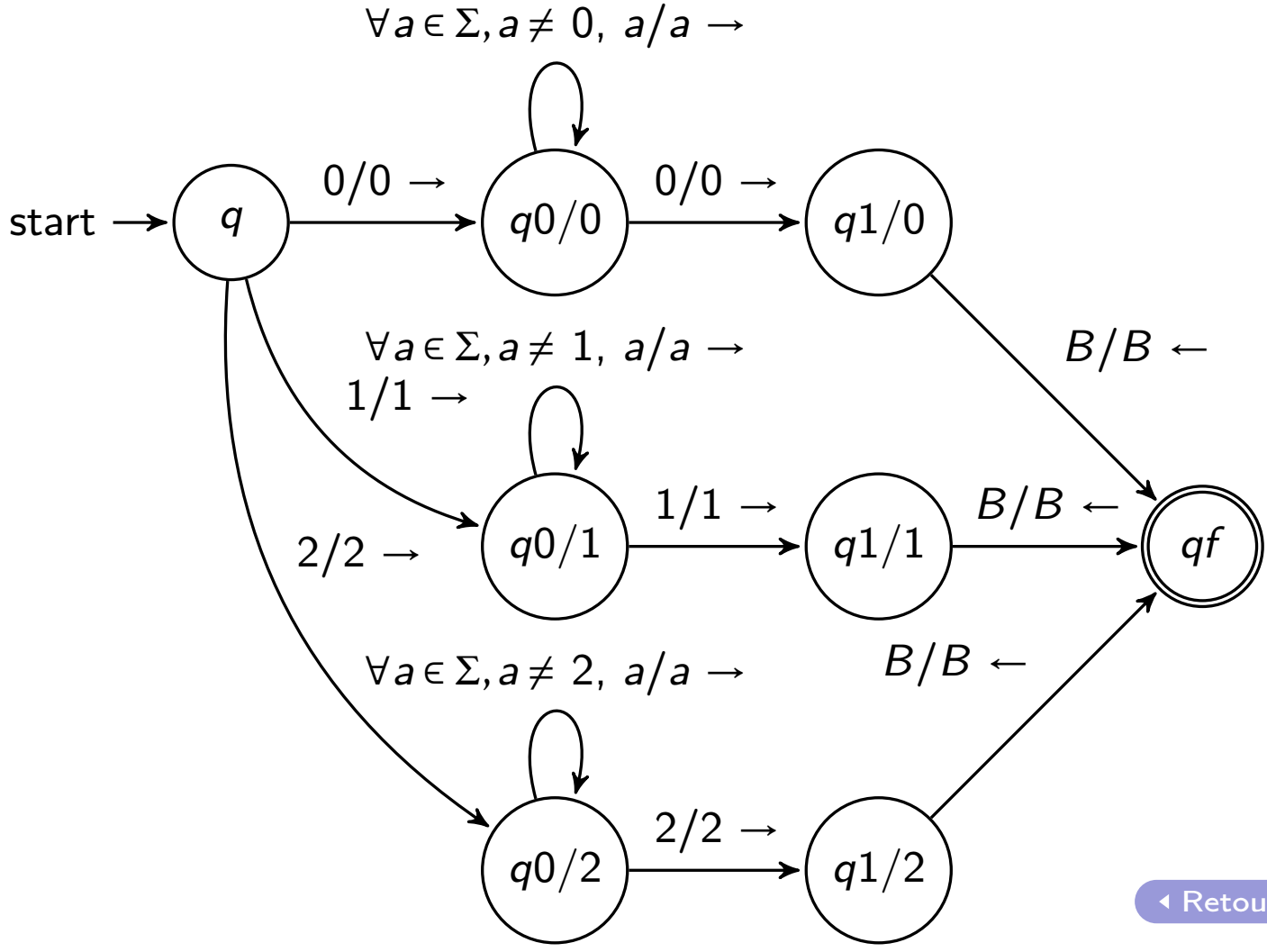


Utiliser l'état interne pour stocker une information finie

- Si l'on fixe un symbole $a_0 \in \Sigma$, il est facile de construire un programme qui vérifie que le symbole a_0 n'apparaît nulle part sauf sur la toute dernière lettre à droite.

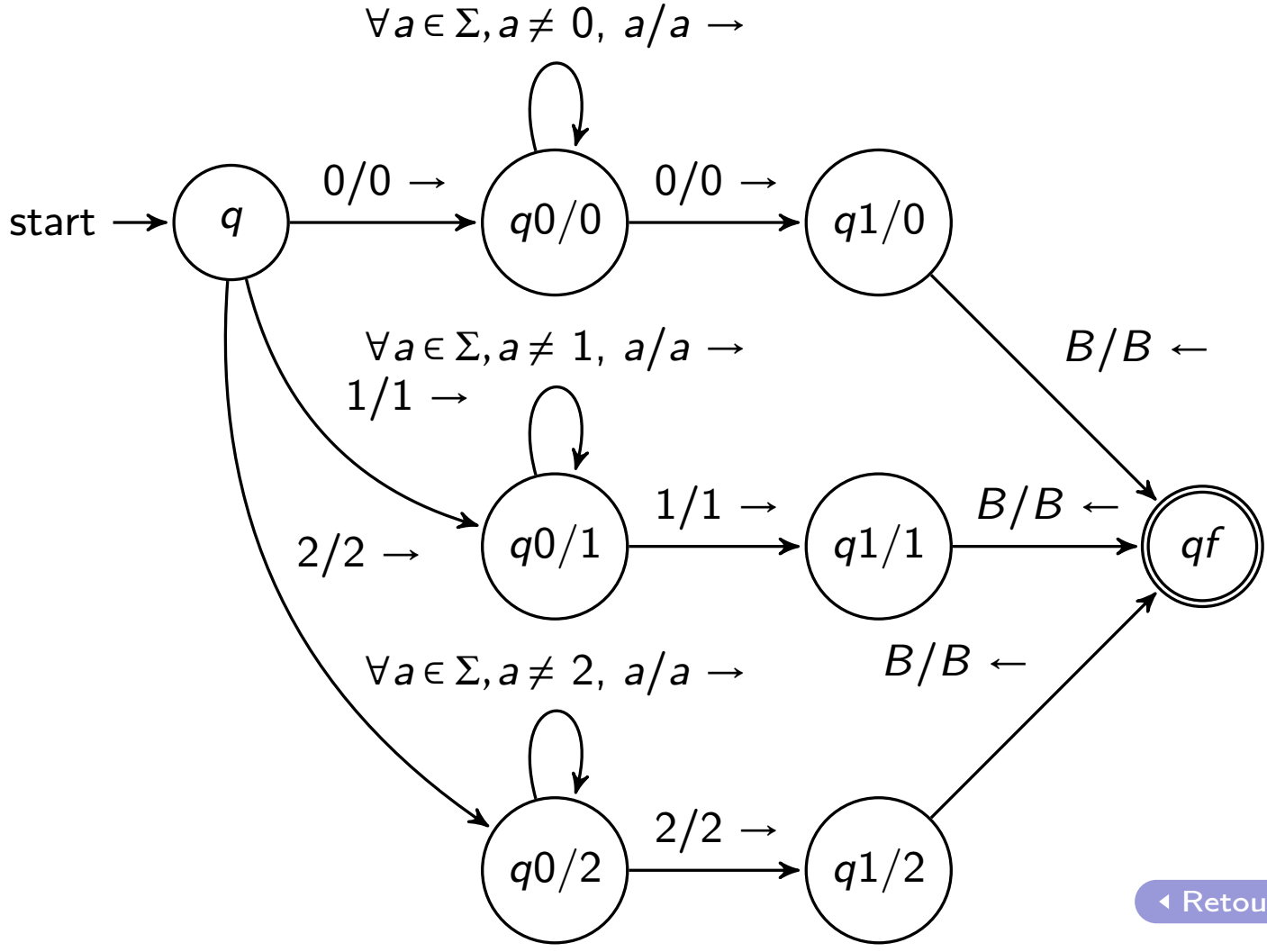


- Pour résoudre notre problème, il suffit de lire la première lettre a_0 et de recopier ce programme autant de fois qu'il y a de lettres dans Σ. Si $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ par exemple :



Retour

- Pour résoudre notre problème, il suffit de lire la première lettre a_0 et de recopier ce programme autant de fois qu'il y a de lettres dans Σ. Si $\Sigma = \{0,1,2\}$ par exemple :



◂ Retour

  - On utilise le fait que l'on travaille sur des états qui peuvent être des couples : ici des couples q_i/j avec $i \in \{1,2\}$, et $j \in \Sigma$.

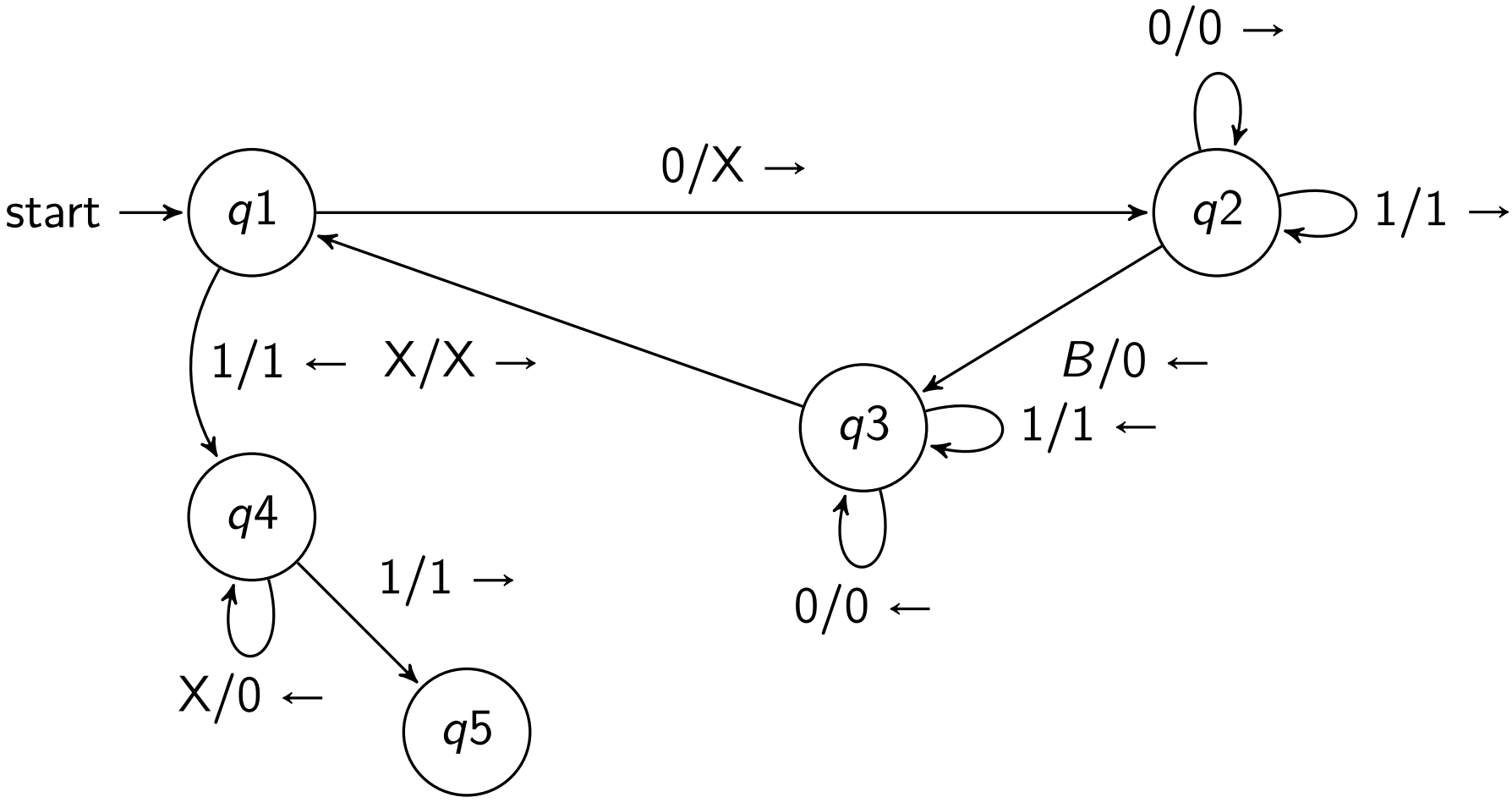
Technique 2 : Utiliser des sous-procédures

- Voici une stratégie possible :

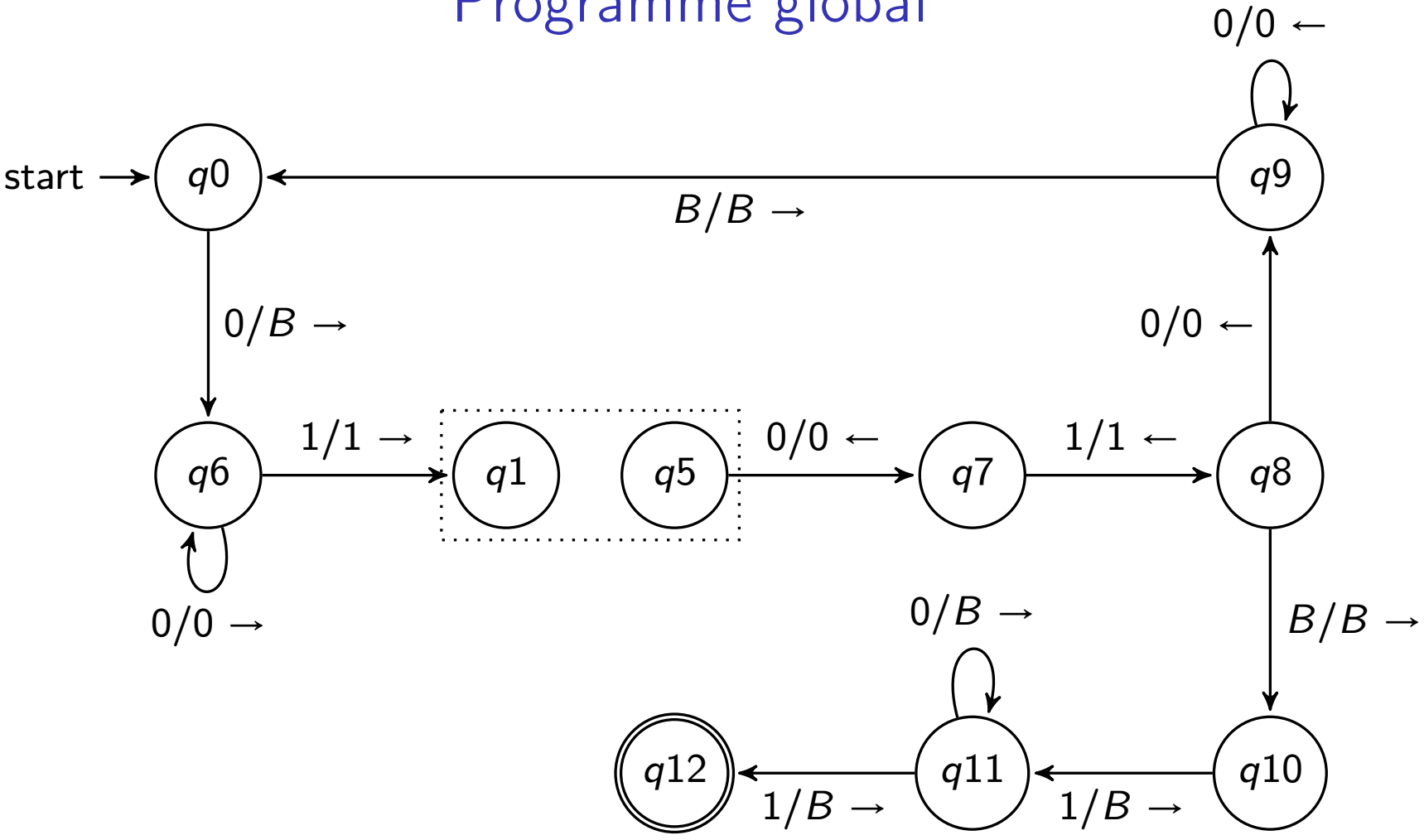
  1. le ruban contiendra un mot de la forme $0^i 10^n 10^{kn}$ pour un certain entier k ;
  2. dans chaque étape, on change un 0 du premier groupe en un blanc, et on ajoute n 0 au dernier groupe, pour obtenir une chaîne de la forme $0^{i-1} 10^n 10^{(k+1)n}$;
  3. en faisant ainsi, on copie le groupe de n 0 m fois, une fois pour chaque symbole du premier groupe mis à blanc. Quand il ne reste plus de blanc dans le premier groupe de 0, il y aura donc $m * n$ 0 dans le dernier groupe ;
  4. la dernière étape est de changer le préfixe $10^n 1$ en des blancs, et cela sera terminé.

Implémenter l'étape 2

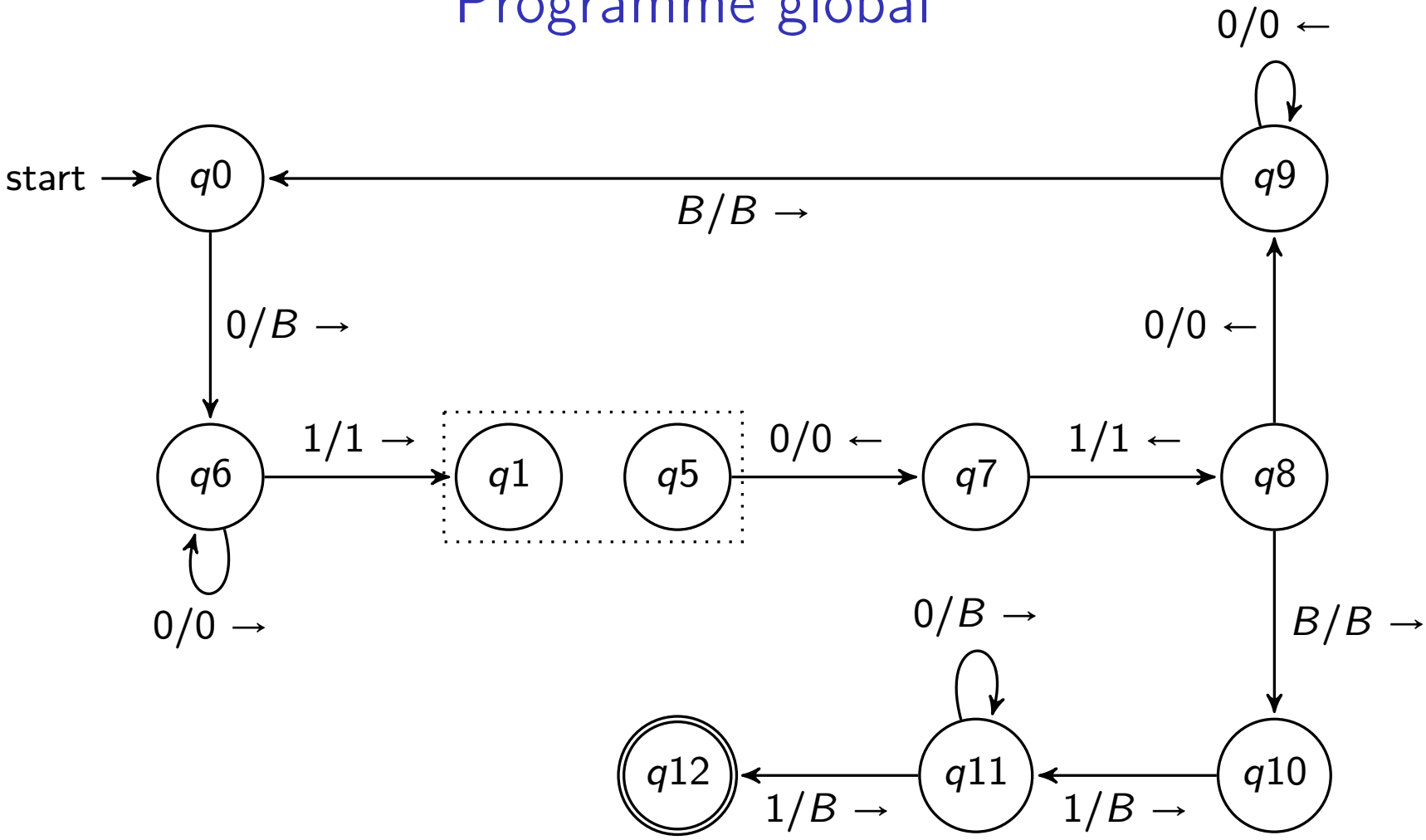
- Transformer une configuration $0^{m-k}1q_10^n10^{(k-1)n}$ en $0^{m-k}1q_50^n10^{kn}$.



Programme global



Programme global



- On utilise le fait que l'on peut réaliser des sous-procédures en "collant" des programmes correspondant à des sous-procédures.

◂ Retour