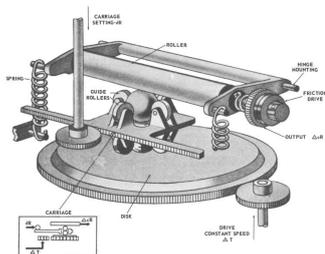


## Cours 2: Calcul propositionnel. Calcul des prédicats.



Olivier Bournez  
bournez@lix.polytechnique.fr

INF412

Ecole Polytechnique  
CSC\_INF41012\_EP

1

## Retour sur l'épisode précédent

### Syntaxe :

L'ensemble des formules propositionnelles  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{P}$  est le langage sur l'alphabet  $\mathcal{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (, )\}$  défini inductivement par les règles suivantes :

(B) il contient  $\mathcal{P}$  : toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;

(I) si  $F \in \mathcal{F}$  alors  $\neg F \in \mathcal{F}$  ;

(I) si  $F, G \in \mathcal{F}$  alors  $(F \wedge G) \in \mathcal{F}$ ,  $(F \vee G) \in \mathcal{F}$ ,  $(F \Rightarrow G) \in \mathcal{F}$ , et  $(F \Leftrightarrow G) \in \mathcal{F}$ .

### Semantique : définie inductivement.

$p$	$q$	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

■ Lorsque la formule  $F$  s'évalue en 1, on dit que  $F$  est **satisfaite** en  $v$ , et que  $v$  est un **modèle** de  $F$ .

2

## Tautologies, formules équivalentes

■ Une **tautologie** est une formule  $F$  qui est satisfaite en toute valuation.

■ Deux formules  $F$  et  $G$  sont dites **équivalentes** si elles s'évaluent en 1 (et donc aussi en 0) pour exactement les mêmes valuations.

▶ On écrit dans ce cas  $F \equiv G$ .

■ Exemples :

- ▶ La formule  $p \vee \neg p$  est une tautologie ;
- ▶ Les formules  $p$  et  $\neg \neg p$  sont équivalentes.

3

## Quelques équivalences

■ Pour toutes formules  $F$  et  $G$ , les formules suivantes sont des tautologies :

$$(F \Rightarrow F),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow F)),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)).$$

■ Idempotence : pour toute formule  $F$

$$(F \vee F) \equiv F,$$

$$(F \wedge F) \equiv F.$$

■ Associativité : pour toutes formules  $F, G, H$

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H),$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H).$$

4

### Quelques équivalences

- Commutativité : pour toutes formules  $F$  et  $G$

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F),$$

$$(F \vee G) \equiv (G \vee F).$$

- Distributivité : pour toutes formules  $F, G, H$

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)),$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)).$$

- Lois de De Morgan : pour toutes formules  $F$  et  $G$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G),$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G).$$

- Absorption : pour toutes formules  $F$  et  $G$

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F.$$

5

- En raison des équivalences précédentes (associativité), on va dorénavant souvent ne pas écrire toutes les parenthèses

6

### Complétude fonctionnelle

#### Théorème

Toute fonction  $f$  des valuations sur  $\{0,1\}^n$  dans  $\{0,1\}$  est la valeur de vérité d'une formule propositionnelle.

7

- Démonstration :

- ▶ Par récurrence sur le nombre  $n$  de variables de  $f$ .
- ▶ Pour  $n=1$ , il y a quatre fonctions de  $\{0,1\}^1$  dans  $\{0,1\}$ , qui se représentent par les formules  $p, \neg p, (p \vee \neg p), (p \wedge \neg p)$ .
- ▶ Supposons la propriété vraie pour  $n-1$ .
- ▶ Chaque valuation  $v'$  sur  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  peut se voir comme la restriction d'une valuation sur  $\{p_1, \dots, p_n\}$ .
- ▶ Soit  $f_0$  (respectivement  $f_1$ ) la restriction de  $f$  à la valuation  $v$  telle que  $v(p_n) = 0$  (resp.  $v(p_n) = 1$ ).
- ▶ Les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  se représentent par des formules  $G(p_1, \dots, p_{n-1})$  et  $H(p_1, \dots, p_{n-1})$  respectivement par hypothèse de récurrence.
- ▶ La fonction  $f$  peut alors se représenter par la formule
$$(\neg p_n \wedge G(p_1, \dots, p_{n-1})) \vee (p_n \wedge H(p_1, \dots, p_{n-1})),$$
ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang  $n$ .

8

## Formes normales

- Un **littéral** est de la forme  $p$ , ou  $\neg p$ , pour  $p \in \mathcal{P}$ .
- Une **forme normale disjonctive (FND)** est une disjonction  $F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_k$  de formules, où chaque formule  $F_i$  est une conjonction  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_{\ell_i}$  de littéraux.
- Une **forme normale conjonctive (FNC)** est une conjonction  $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k$  de formules, où chaque formule  $F_i$  est une disjonction  $G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_{\ell_i}$  de littéraux.
- Remarque. Dans ces écritures, on s'autorise à supprimer des parenthèses (par les règles d'associativité de  $\wedge$  et de  $\vee$ ).
- Exemples :
  - ▶  $((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p))$  est une FND.
  - ▶  $\neg p \vee q$  et  $(\neg p \vee q) \wedge \neg r$  sont des FNC.

9

## Formes normales

### Théorème

- Toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale conjonctive.
- Toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale disjonctive.

### Corollaire

Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs  $\vee$ ,  $\wedge$  et  $\neg$ .

### Corollaire

- Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs  $\neg$  et  $\wedge$ .
- Toute formule propositionnelle s'écrit avec uniquement les connecteurs  $\neg$  et  $\vee$ .

- Démonstration : remplacer les  $\vee$  ou les  $\wedge$  en utilisant les lois de Morgan.

10

- Démonstration par induction sur la formule :
  - ▶ Par récurrence sur  $n$  comme dans la preuve précédente.
  - ▶ Pour  $n=1$ ,  $p$ ,  $\neg p$ ,  $p \vee \neg p$ ,  $p \wedge \neg p$  sont en FNC et FND.
  - ▶ On suppose la propriété vraie pour  $n-1$ .
  - ▶ Comme dans la dernière preuve, on peut construire une formule qui représente la fonction valeur de vérité  $f$  associée à la formule  $F(p_1, \dots, p_n)$  par une formule de la forme

$$(\neg p_n \wedge G(p_1, \dots, p_{n-1})) \vee (p_n \wedge H(p_1, \dots, p_{n-1})).$$

- ▶ Par hypothèse de récurrence,  $G$  et  $H$  sont équivalentes à

$$G \equiv (G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_k) \text{ et } H \equiv (H_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_\ell)$$

- ▶ On peut alors écrire

$$(\neg p_n \wedge G) \equiv (\neg p_n \wedge G_1) \vee (\neg p_n \wedge G_2) \vee \dots \vee (\neg p_n \wedge G_k)$$

$$(p_n \wedge H) \equiv (p_n \wedge H_1) \vee (p_n \wedge H_2) \vee \dots \vee (p_n \wedge H_\ell)$$

qui sont les deux en FND.

- ▶ La fonction  $f$  est donc représentée par la disjonction de ces deux formules, et donc par une FND.
- ▶ Si l'on veut obtenir  $F$  en forme normale conjonctive, on utilise l'équivalence  $F \equiv ((\neg p_n \vee H) \wedge (p_n \vee G))$ .

11

## Introduction

- On va commencer à aborder la question suivante :

qu'est-ce qu'une démonstration ?

- Exemple :

- ▶ on se donne une formule propositionnelle  $F$ ,
- ▶ et on veut décider si  $F$  est une tautologie.

12

## Une première méthode

- Première méthode :
  - ▶ Une formule propositionnelle  $F$  s'écrit à l'aide d'un nombre fini de variables  $p_1, \dots, p_n$ .
  - ▶ On détermine la valeur de  $F$  sur les  $2^n$  valuations possibles de  $p_1, \dots, p_n$ , et on vérifie que c'est bien 1 pour toutes les valuations.
  - ▶ Soucis :
    1. Complexité exponentielle :  
pour  $n$  grand,  
le temps explose, car  $2^n$  est très grand ;  
en outre, le temps explose **TOUJOURS**.
    2. Cela ne correspond pas à ce que l'on aurait pu vouloir appeler une "démonstration".

13

## Des systèmes de preuve

- Preuves à la Hilbert-Fregge.
- Déduction naturelle.
- Preuves par résolution. (cf PC de demain).
- Méthode des tableaux.

14

## Preuves à la Hilbert-Fregge

- Principe :
  - ▶ on part d'un ensemble d'axiomes, qui sont des tautologies ;
  - ▶ et on utilise une unique règle de déduction, le **modus ponens**, aussi appelé **coupure**, qui vise à capturer un type de raisonnement tout à fait naturel en mathématique.
- La règle du modus ponens dit qu'à partir de la formule  $F$  et d'une formule  $F \Rightarrow G$ , on déduit  $G$ .

$$\frac{F \quad (F \Rightarrow G)}{G}$$

- Exemple : à partir de  $(A \wedge B)$  et de  $(A \wedge B) \Rightarrow C$  on déduit  $C$ .

15

- On dit qu'une formule  $F$  est une **instance** d'une formule  $G$  si  $F$  s'obtient en substituant certaines variables propositionnelles de  $G$  par des formules  $F_i$ .
- Un **axiome de la logique booléenne** est n'importe quelle **instance** d'une des formules suivantes :
  1.  $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_1))$  (axiome 1 pour l'implication) ;
  2.  $((X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow X_3)) \Rightarrow ((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (X_1 \Rightarrow X_3)))$  (axiome 2 pour l'implication) ;
  3.  $(X_1 \Rightarrow \neg\neg X_1)$  (axiome 1 pour la négation) ;
  4.  $(\neg\neg X_1 \Rightarrow X_1)$  (axiome 2 pour la négation) ;
  5.  $((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow (\neg X_2 \Rightarrow \neg X_1))$  (axiome 3 pour la négation) ;
  6.  $(X_1 \Rightarrow (X_2 \Rightarrow (X_1 \wedge X_2)))$  (axiome 1 pour la conjonction) ;
  7.  $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_1)$  (axiome 2 pour la conjonction) ;
  8.  $((X_1 \wedge X_2) \Rightarrow X_2)$  (axiome 3 pour la conjonction) ;
  9.  $(X_1 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$  (axiome 1 pour la disjonction) ;
  10.  $(X_2 \Rightarrow (X_1 \vee X_2))$  (axiome 2 pour la disjonction) ;
  11.  $(\neg X_1 \Rightarrow ((X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_2))$  (axiome 3 pour la disjonction).

16

## Preuve par modus ponens

- Soit  $T$  un ensemble de formules propositionnelles, et  $F$  une formule propositionnelle.
- Une **preuve de  $F$  à partir de  $T$**  est une suite finie  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de formules propositionnelles telle que :
  - ▶  $F_n$  est égale à  $F$ ,
  - ▶ et pour tout  $i$ ,
    - ou bien  $F_i$  est dans  $T$ ;
    - ou bien  $F_i$  est un axiome de la logique booléenne;
    - ou bien  $F_i$  s'obtient par modus ponens à partir de deux formules  $F_j, F_k$  avec  $j < i$  et  $k < i$ .
- Notation :
  - ▶ On dit que  $F$  est **prouvable à partir de  $T$** , noté  $T \vdash F$  dans ce cas.  $F$  est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de  $T = \emptyset$ .

17

## Exemple

Voici une preuve de  $(F \Rightarrow H)$  à partir de  $\{(F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H)\}$  :

- $F_1 : (G \Rightarrow H)$  (hypothèse) ;
- $F_2 : ((G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H)))$  (instance de l'axiome 1.) ;
- $F_3 : (F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$  (modus ponens à partir de  $F_1$  et  $F_2$ ) ;
- $F_4 : ((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)))$  (instance de l'axiome 2.) ;
- $F_5 : ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$  (modus ponens à partir de  $F_3$  et  $F_4$ ) ;
- $F_6 : (F \Rightarrow G)$  (hypothèse) ;
- $F_7 : (F \Rightarrow H)$  (modus ponens à partir de  $F_6$  et  $F_5$ ).

18

## Validité et complétude de cette méthode de preuve

### Théorème (Validité)

*Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.*

### Théorème (Complétude)

*Toute tautologie est prouvable.*

- Plus généralement :
  - ▶ Notons  $T \models F$  pour signifier que tout modèle de chacune des formules de  $T$  est un modèle de  $F$ .
  - ▶ On dit que  $F$  est une **conséquence** (sémantique) de  $T$ .
  - ▶ On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

19

## Déduction naturelle

- La notion de démonstration précédente est pénible à utiliser en pratique.
- Une alternative : la **déduction naturelle**.
- Principe :
  - ▶ On manipule des couples (appelés **séquents**)  $\Gamma \vdash A$ , où  $\Gamma$  est un ensemble fini de formules (propositionnelles) et  $A$  est une formule (propositionnelle).
    - Motivation sous-jacente :  $\Gamma \vdash A$  exprime le fait que sous les hypothèses  $\Gamma$ , on a  $A$ .
  - ▶ On utilise les règles de déduction du transparent suivant
    - i.e. : on définit inductivement l'**ensemble des séquents dérivables** par les règles du transparent suivant.
    - Ici, on considère que les formules incluent aussi  $\perp$ , interprété par faux, et  $\top$  interprété par vrai.
- On dit que  $F$  est **prouvable à partir de  $T$** , noté  $T \vdash F$  si  $T \vdash F$  est un séquent dérivable.  $F$  est dite **prouvable** si elle est prouvable à partir de  $T = \emptyset$ .

20

$$\overline{\Gamma \vdash A} \text{ axiome pour chaque } A \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ v-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \text{ v-élim}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \text{ T-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \text{ v-intro}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg\text{-élim}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{ tiers exclu}$$

21

## Exemple

$$\frac{}{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash (F \Rightarrow G)} \text{ ax}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash F} \text{ ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash (F \Rightarrow G) \quad \Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash F}{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash (F \Rightarrow H)} \Rightarrow\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H), F \vdash (F \Rightarrow H)}{\Gamma \vdash (F \Rightarrow G), (G \Rightarrow H) \vdash (F \Rightarrow H)} \Rightarrow\text{-intro}$$

22

## Validité et complétude de cette méthode de preuve

### Théorème (Validité)

Toute formule propositionnelle prouvable est une tautologie.

### Théorème (Complétude)

Toute tautologie est prouvable.

#### Plus généralement :

- ▶ Notons  $T \models F$  pour signifier que tout modèle de chacune des formules de  $T$  est un modèle de  $F$ .
- ▶ On dit que  $F$  est une **conséquence** (sémantique) de  $T$ .
- ▶ On a :

$$T \vdash F \text{ ssi } T \models F.$$

23

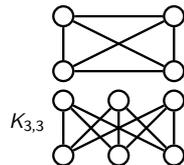
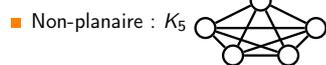
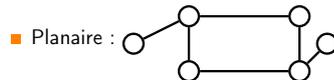
## Motivation

- Le calcul propositionnel reste très limité...
- Si on veut aller plus loin, on peut chercher à parler de choses plus générales que les fonctions booléennes.
  - ▶ On va se donner cette fois un ensemble  $\Sigma$  de formules.
    - $\Sigma$  peut être fini ou infini.
  - ▶ On cherche à savoir quand on peut satisfaire toutes les formules de  $\Sigma$ .
- Le reste de cette section : la présentation d'un des grands résultats du calcul propositionnel, le théorème de compacité, via quelques digressions liées à une application.

24

### Digression : Théorie des graphes.

- Un graphe est dit **planaire** s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.



#### Théorème (Kuratowski-Wagner)

Un graphe fini est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui soit une expansion de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ .

- ▶ Une expansion consiste (grossièrement) à ajouter un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes (exemple : devient )

25

### Digression : Coloriage de graphes.

- Le problème de **coloriage d'un graphe** : colorier les sommets d'un graphe de telle sorte qu'aucune arête n'ait ses extrémités d'une même couleur.



Un coloriage avec 4 couleurs

#### Théorème (Appel et Haken (76))

Tout graphe planaire est coloriable avec 4 couleurs.

- ▶ Preuve avec 1478 cas critiques.
- ▶ Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, Gonthier, Werner...
- Digression : Le problème du coloriage de graphes est NP-complet (voir fin du cours).

26

### Retour sur la logique propositionnelle

- On se donne un graphe  $G = (V, E)$  et  $k$  couleurs.
- On considère  $\mathcal{P} = \{A_{u,i}, u \in V, 1 \leq i \leq k\}$  un ensemble de variables propositionnelles.
- Idée :  $A_{u,i}$  vraie ssi le sommet  $u$  est colorié avec la couleur  $i$ .
- Contraintes :
  - ▶ Chaque sommet possède une couleur :
 
$$\Gamma_1 = \{A_{u,1} \vee \dots \vee A_{u,k} \mid u \in V\}.$$
  - ▶ Chaque sommet n'a pas plus qu'une couleur :
 
$$\Gamma_2 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{u,j}) \mid u \in V, 1 \leq i, j \leq k, i \neq j\}.$$
  - ▶ Chaque arête n'a pas ses extrémités d'une même couleur :
 
$$\Gamma_3 = \{\neg(A_{u,i} \wedge A_{v,i}) \mid u \in V, 1 \leq i \leq k, (u, v) \in E\}.$$
- Un graphe est coloriable avec  $k$  couleurs si et seulement si on peut satisfaire toutes les formules de  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ .

27

### Définitions

- Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules.
- Définitions :
  - ▶ Une valuation  $v$  **satisfait**  $\Sigma$  si elle satisfait chaque formule de  $\Sigma$ . On note alors  $v \models \Sigma$ . On dit aussi dans ce cas que cette valuation est un **modèle** de  $\Sigma$ .
  - ▶  $\Sigma$  est dit **satisfiable**, ou **consistant**, s'il existe une valuation qui le satisfait.  $\Sigma$  est dit **inconsistant**, ou **contradictoire**, sinon.
- Exemples :
  - ▶  $\{p, \neg q, p \vee r\}$  est satisfiable.
  - ▶  $\{p, p \Rightarrow q, \neg q\}$  est inconsistant.
  - ▶ une valuation satisfait  $\Gamma$  ssi elle correspond à un  $k$ -coloriage.

28

## Théorème de compacité

Supposons  $\mathcal{P}$  dénombrable.

Trois formulations équivalentes du théorème.

### Théorème (Version 1)

Un ensemble  $\Sigma$  de formules est satisfiable si et seulement si toute partie finie de  $\Sigma$  est satisfiable.

### Théorème (Version 2)

Un ensemble  $\Sigma$  de formules est inconsistant si et seulement si  $\Sigma$  possède une partie finie inconsistante.

### Théorème (Version 3)

Une formule  $F$  est une conséquence d'un ensemble  $\Sigma$  de formules si et seulement si  $F$  est une conséquence d'une partie finie de  $\Sigma$ .

► Démonstration

29

## Une application du théorème : Coloriage de graphes

- Dans la preuve du théorème de Appel et Haken, il "suffit" de faire la preuve pour les graphes finis :

### Théorème

Un graphe (fini ou infini)  $G$  est coloriable avec  $k$  couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes est coloriable avec  $k$  couleurs.

- Sens  $\Rightarrow$  : trivial.
- Sens  $\Leftarrow$  : Pourquoi?
  - $\Gamma$  est satisfiable si et seulement si toute partie finie  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  est satisfiable.
  - Soit  $\Gamma_0$  une partie finie de  $\Gamma$ . Soient  $V_0 = \{u_1, \dots, u_n\}$  les sommets  $u$  tels que  $A_{u,i}$  figure dans une des formules de  $\Gamma_0$ . Soit  $G_0 = (V_0, E_0)$  le sous-graphe déterminé par  $V_0$ .
  - Par hypothèse,  $G_0$  est coloriable avec  $k$  couleurs, et donc  $\Gamma_0$  est satisfiable.

30

## Autres applications

- Le théorème de compacité est vrai pour des logiques plus générales.
- Autre application :
  - Lemme de König : tout arbre infini dénombrable de degré fini possède un chemin infini.
- ... il a surtout des applications dans des logiques plus générales.

31

- Si l'on veut pouvoir raisonner sur des assertions mathématiques, il nous faut autoriser des constructions plus riches que celles du calcul propositionnel.

- Un énoncé comme

$$\forall x((\text{Premier}(x) \wedge x > 1 + 1) \Rightarrow \text{Impair}(x)).$$

n'est pas capturé par la logique propositionnelle :

- on a des **prédicats** comme  $\text{Premier}(x)$  dont la valeur de vérité dépend d'une variable  $x$  ;
- on utilise des quantificateurs comme  $\exists, \forall$ .

32

## Logique du premier ordre

- On va présenter seulement le **calcul des prédicats du premier ordre**.

- ▶ En logique du **premier ordre**, on n'autorise que les quantifications sur les variables.

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > 1 + 1) \Rightarrow Impair(x)).$$

- Un énoncé **du second ordre** (ou **d'ordre supérieur**) serait un énoncé où l'on autoriserait les quantifications sur les fonctions ou des relations.

- ▶ Exemple :

$$\neg \exists f(\forall x(f(x) > f(x+1))).$$

33

## Premières considérations

- Pour écrire une formule d'un langage du premier ordre, on utilise

- ▶ certains symboles qui sont communs à tous les langages,
- ▶ et certains symboles qui varient d'un langage à l'autre.

$$\forall x((Premier(x) \wedge x > 1 + 1) \Rightarrow Impair(x)).$$

- Les symboles

- ▶ communs à tous les langages sont :

- les connecteurs  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  ;
- les parenthèses ( et ) et la virgule , ;
- le quantificateur universel  $\forall$  et le quantificateur existentiel  $\exists$  ;
- un ensemble infini dénombrable de symboles  $\mathcal{V}$  de variables.

- ▶ qui peuvent varier d'un langage à l'autre sont :

- capturés par la notion de **signature**.

34

## Signature d'un langage du premier ordre

- La signature  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  d'un langage du premier ordre est la donnée<sup>1</sup> :

- ▶ d'un premier ensemble  $\mathcal{C}$  de **symboles de constantes** ;
- ▶ d'un second ensemble  $\mathcal{F}$  de **symboles de fonctions**.
  - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité** ;
- ▶ d'un troisième ensemble  $\mathcal{R}$  de **symboles de relations**.
  - A chaque symbole de cet ensemble est associé un entier strictement positif, que l'on appelle **son arité**.

1. On supposera que  $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$  sont des ensembles disjoints deux à deux.

35

## Exemples

- Exemples de signatures :

- ▶  $\Sigma = (\{0, 1\}, \{s, +\}, \{Impair, Premier, =, <\})$  avec les symboles de constante 0 et 1, les symboles de fonctions  $s$  d'arité 1 et  $+$  d'arité 2, les symboles de relations  $Impairs$  et  $Premier$  d'arité 1 et  $=$  et  $<$  d'arité 2.
- ▶  $\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$  avec  $c, d$  deux symboles de constante,  $f$  un symbole de fonction d'arité 1,  $g$  et  $h$  deux symboles de fonctions d'arité 2,  $R$  un symbole de relation d'arité 2.

36

- Une formule du premier ordre sera alors un mot sur l'alphabet

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (, ), ,, =, \forall, \exists\}.$$

- On va définir par étapes :

1. d'abord les **termes**,
  - qui visent à représenter des objets,
2. puis les **formules atomiques**,
  - qui visent à représenter des relations entre objets,
3. et enfin les **formules**.

37

- Il est utile<sup>2</sup> de lire le **polycopié**.

- ▶ en particulier, le chapitre 5.

- tout ce qui suit dans cette section précise la terminologie et les définitions mais reste sur le fond sans surprises...

---

2. voire nécessaire

38

- Et c'est pour cela que la suite va être subliminale ... ,

... car le mieux est de le lire par soit-même à tête reposée

- ▶ puis de faire par exemple le quizz sur le moodle INF412 ...

39

PARTIE SUBLIMINALE:

A LIRE ATTENTIVEMENT PAR SOI-MÊME

## Termes

- Soit  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  une signature.
- L'ensemble  $T$  des **termes** sur la signature  $\Sigma$  est le langage sur l'alphabet  $\mathcal{A}(\Sigma)$  défini inductivement par :
  - (B) toute variable est un terme :  $\mathcal{V} \subset T$  ;
  - (B) toute constante est un terme :  $\mathcal{C} \subset T$  ;
  - (I) si  $f$  est un symbole de fonction d'arité  $n$  et si  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont des termes, alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme.
- Un **terme clos** est un terme sans variable.

## Exemples

- (Convention :  $x, y, z, \dots$  désignent des variables, c-à-d des éléments de  $\mathcal{V}$ ).
- Exemples :
  - ▶  $+(x, s(+ (1, 1)))$  est un terme sur la signature  $\Sigma$  précédente qui n'est pas clos.  $+(+(s(1), +(1, 1)), s(s(0)))$  est un terme clos sur cette même signature.
  - ▶  $h(c, x), h(y, z), g(d, h(y, z))$  et  $f(g(d, h(y, z)))$  sont des termes sur la signature  $\mathcal{L}_2$ .

## Formules atomiques

- Soit  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  une signature.
- Une **formule atomique** sur la signature  $\Sigma$  est un mot sur l'alphabet  $\mathcal{A}(\Sigma)$  de la forme  $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , où  $R \in \mathcal{R}$  est un symbole de relation d'arité  $n$ , et où  $t_1, t_2, \dots, t_n$  sont des termes sur  $\Sigma$ .
- Exemples :
  - ▶  $>(x, +(1, 0))$  est une formule atomique sur la signature précédente.  $=(x, s(y))$  aussi.
  - ▶ On convient parfois d'écrire  $t_1 R t_2$  pour certains symboles binaires, comme  $=, <, +$  :
    - par exemple, on écrira  $x > 1 + 1$  pour  $>(x, +(1, 1))$ , ou  $(s(1) + 1) + s(s(0))$  pour  $+(+(s(1), 1), s(s(0)))$ .
  - ▶  $R(f(x), g(c, f(d)))$  est une formule atomique sur  $\mathcal{L}_2$ .

## Formules

- Soit  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  une signature.
- L'ensemble des formules sur la signature  $\Sigma$  est le langage sur l'alphabet  $\mathcal{A}(\Sigma)$  défini inductivement par :
  - (B) toute formule atomique est une formule ;
  - (I) si  $F$  est une formule, alors  $\neg F$  est une formule ;
  - (I) si  $F$  et  $G$  sont des formules, alors  $(F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G)$ , et  $(F \Leftrightarrow G)$  sont des formules ;
  - (I) si  $F$  est une formule, et si  $x \in \mathcal{V}$  est une variable, alors  $\forall x F$  est une formule, et  $\exists x F$  aussi.

## Exemples

### Exemples :

- ▶  $\forall x((Premier(x) \wedge x > 1 + 1) \Rightarrow Impair(x))$  est une formule sur la signature  $\Sigma$  précédente.
- ▶  $\exists x(s(x) = 1 + 0 \vee \forall y x + y > s(x))$  aussi.
- ▶ Exemples de formules sur la signature  $\mathcal{L}_2$  :
  - $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$
  - $\forall x \exists y (g(x, y) = c \wedge g(y, x) = c)$  ;
  - $\forall x \neg f(x) = c$  ;
  - $\forall x \exists y \neg f(x) = c$ .

## Théorème de décomposition/lecture unique

Ce sont des définitions inductives non-ambigües :

### Théorème (de décomposition/lecture unique)

#### ■ Toute formule $F$ est d'une, et exactement d'une, des formes suivantes :

1. une formule atomique ;
2.  $\neg G$ , où  $G$  est une formule ;
3.  $(G \wedge H)$  où  $G$  et  $H$  sont des formules ;
4.  $(G \vee H)$  où  $G$  et  $H$  sont des formules ;
5.  $(G \Rightarrow H)$  où  $G$  et  $H$  sont des formules ;
6.  $(G \Leftrightarrow H)$  où  $G$  et  $H$  sont des formules ;
7.  $\forall x G$  où  $G$  est une formule et  $x$  une variable ;
8.  $\exists x G$  où  $G$  est une formule et  $x$  une variable.

#### ■ De plus dans le premier cas, il y a une unique façon de "lire" la formule atomique. Dans chacun des autres cas, il y a unicité de la formule $G$ et de la formule $H$ avec cette propriété.

## Intuition

- L'intuition de ce qui va suivre est de distinguer les variables **liées** des variables qui ne le sont pas.
- Tout cela est en fait à propos de " $\forall x$ " et " $\exists x$ " qui sont des **lieux** :
  - ▶ lorsqu'on écrit  $\forall x F$  ou  $\exists x F$ ,  $x$  devient une variable liée ;
  - ▶ en d'autres termes,  $x$  est une variable "muette" de  $\forall x F$ .
  - ▶ on pourrait tout aussi bien écrire  $\forall y F(y/x)$  (respectivement :  $\exists y F(y/x)$ ) où  $F(y/x)$  désigne intuitivement la formule que l'on obtient en remplaçant  $x$  par  $y$  dans  $F$ .
- D'autres lieux en mathématiques :
  - ▶ le symbole intégrale : dans l'expression  $\int_a^b f(t) dt$ , la variable  $t$  est une variable muette (liée).  $\int_a^b f(u) du$  est exactement la même intégrale.

## Le cas des termes

- Les variables libres d'un terme sont les variables qui apparaissent dans ce terme.
- Si on préfère : l'ensemble  $\ell(t)$  des **variables libres d'un terme**  $t$  se définit inductivement par :
  - (B)  $\ell(v) = \{v\}$  pour  $v \in \mathcal{V}$  ;
  - (B)  $\ell(c) = \emptyset$  pour  $c \in \mathcal{C}$  ;
  - (I)  $\ell(f(t_1, \dots, t_n)) = \ell(t_1) \cup \dots \cup \ell(t_n)$ .

## Le cas des formules

- L'ensemble  $\ell(t)$  des **variables libres d'une formule**  $F$  se définit inductivement par :

$$\begin{aligned} (B) \quad & \ell(R(t_1, \dots, t_n)) = \ell(t_1) \cup \dots \cup \ell(t_n); \\ (I) \quad & \ell(\neg G) = \ell(G); \\ (I) \quad & \ell(G \vee H) = \ell(G \wedge H) = \ell(G \Rightarrow H) = \ell(G \Leftrightarrow H) = \ell(G) \cup \ell(H); \\ (I) \quad & \ell(\forall x F) = \ell(\exists x F) = \ell(F) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

- Une formule  $F$  est dite **close** si elle ne possède pas de variables libres.
- Exemple :
  - ▶ La formule  $\forall x \forall z (R(x, z) \Rightarrow \exists y (R(y, z) \vee y = z))$  est close.

- Nous pouvons maintenant parler du sens que l'on donne aux formules.
- Pour donner un sens aux formules, il faut fixer un sens aux symboles de la signature, et c'est l'objet de la notion de structure.

## Structures

- Soit  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  une signature.
- Une **structure**  $\mathfrak{M}$  de signature  $\Sigma$  est la donnée :
  - ▶ d'un ensemble non-vide  $M$ , appelé **ensemble de base**, ou **domaine** de la structure ;
  - ▶ d'un élément de  $M$ , noté  $c^{\mathfrak{M}}$ , pour chaque symbole de constante  $c \in \mathcal{C}$  ;
  - ▶ d'une fonction, notée  $f^{\mathfrak{M}}$ , de  $M^n \rightarrow M$  pour chaque symbole de fonction  $f \in \mathcal{F}$  d'arité  $n$  ;
  - ▶ d'un sous-ensemble, noté  $R^{\mathfrak{M}}$ , de  $M^n$  pour chaque symbole de relation  $R \in \mathcal{R}$  d'arité  $n$ .
- On dit que la constante  $c$  (respectivement la fonction  $f$ , la relation  $R$ ) est **interprétée par**  $c^{\mathfrak{M}}$  (resp.  $f^{\mathfrak{M}}$ ,  $R^{\mathfrak{M}}$ ).
- Une structure est parfois aussi appelée une **réalisation**.

## Exemples

- Exemples :
  - ▶ On peut obtenir une réalisation de la signature  $\Sigma$  précédente en prenant comme ensemble de base les entiers, 0 interprété par l'entier 0, 1 par l'entier 1,  $s$  par la fonction qui à l'entier  $x$  associe  $x+1$ ,  $+$  par la fonction addition, *Impair* par les entiers impairs, *Premier* par les entiers premiers,  $=$  par l'égalité, et  $<$  par la relation  $\{(x, y) | x < y\}$ .
    - On peut la noter  $(\mathbb{N}, =, <, \text{Impair}, \text{Premier}, s, +, 0, 1)$ .
  - ▶ On peut obtenir une réalisation de la signature  $\mathcal{L}_2$  en considérant l'ensemble de base  $\mathbb{R}$  des réels, en interprétant  $R$  comme la relation d'ordre  $\leq$  sur les réels, la fonction  $f$  comme la fonction qui à  $x$  associe  $x+1$ , les fonctions  $g$  et  $h$  comme l'addition et la multiplication, les constantes  $c$  et  $d$  comme 0 et 1.
    - On peut la noter  $(\mathbb{R}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$ .

- On va ensuite utiliser la notion de structure pour interpréter

1. les termes,
2. les formules atomiques,
3. puis inductivement les formules,

comme on peut s'y attendre.

- Une **valuation**  $v$  est une fonction de l'ensemble des variables  $\mathcal{V}$  dans le domaine  $M$  de la structure.

- Etant donnée une valuation  $v$ , l'interprétation :

- ▶ d'un terme est un élément de l'ensemble de base de la structure :
  - les termes désignent donc des éléments de la structure.
- ▶ d'une formule atomique est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.
  - les formules atomiques désignent donc des relations entre éléments de la structure.
- ▶ d'une formule est un objet qui s'interprète soit par **vrai** soit par **faux**.

### Formellement : interprétation des termes

- Soit  $\mathfrak{M}$  une structure de signature  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  et  $v$  une valuation.

#### Définition

L'**interprétation**  $t^{\mathfrak{M}}$  du terme  $t$  en  $v$ , aussi notée  $t^{\mathfrak{M}}$  est définie inductivement de la façon suivante :

- (B) toute variable est interprétée par sa valeur dans la valuation :
  - c-à-d : si  $t$  est la variable  $x_i \in \mathcal{V}$ , alors  $t^{\mathfrak{M}}$  est  $v(x_i)$  ;
- (B) toute constante est interprétée par son interprétation dans la structure :
  - c-à-d : si  $t$  est la constante  $c \in \mathcal{C}$ , alors  $t^{\mathfrak{M}}$  est  $c^{\mathfrak{M}}$  ;
- (I) chaque symbole de fonction est interprété par son interprétation dans la structure.
  - c-à-d : si  $t$  est le terme  $f(t_1, \dots, t_n)$ , alors  $t^{\mathfrak{M}}$  est  $f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}})$ , où  $t_1^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}}$  sont les interprétations respectives des termes  $t_1, \dots, t_n$ .

### Exemples

- Exemples :

- ▶ Soit  $\mathcal{N}$  la structure  $(\mathbb{N}, \leq, s, +, \times, 0, 1)$  de signature  $\mathcal{L}_2 = (\{c, d\}, \{f, g, h\}, \{R\})$ .
  - l'interprétation du terme  $h(d, x)$  pour une valuation telle que  $v(x) = 2$  est 2.
  - l'interprétation du terme  $f(g(d, h(y, z)))$  pour une valuation telle que  $v(y) = 2, v(z) = 3$  est 8.

## Interprétation des formules atomiques

- Soit  $\mathfrak{M}$  une structure de signature  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  et  $v$  une valuation.

### Définition

La valuation  $v$  **satisfait la formule atomique**

$R(t_1, t_2, \dots, t_n)$  de variables libres  $x_1, \dots, x_k$  si

$$(t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}}, \dots, t_n^{\mathfrak{M}}) \in R^{\mathfrak{M}},$$

où  $R^{\mathfrak{M}}$  est l'interprétation du symbole  $R$  dans la structure.

## Exemples

### Exemples :

- ▶ Sur la structure  $\Sigma$  précédente  $x < 1 + 1$  s'interprète par vrai en une valuation telle que  $v(x) = 1$ , et par faux en une valuation telle que  $v(x) = 5$ . La formule atomique  $0 = s(0)$  s'interprète par faux.
- ▶ Sur la structure  $\mathcal{N}$ ,  $R(f(c), h(c), f(d))$  s'interprète par faux.

## Interprétation des formules

- Soit  $\mathfrak{M}$  une structure de signature  $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$  et  $v$  une valuation.

### Définition

L'expression "la valuation  $v$  satisfait la formule  $F = F(x_1, \dots, x_k)$ ", notée  $v \models F$ , se définit inductivement de la façon suivante :

- (B) elle a déjà été définie pour une formule atomique ;
- (I)  $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  sont interprétés exactement comme dans le calcul propositionnel.
  - exemple du  $\vee$  : si  $F$  est de la forme  $(G \vee H)$ , alors  $v \models F$  ssi  $v \models G$  ou  $v \models H$  ;
- (J)  $\exists x$  et  $\forall x$  sont interprétés comme des quantifications existentielles et universelles :
  - ▶ si  $F$  est de la forme  $\forall x_0 G(x_0, x_1, \dots, x_k)$ , alors  $v \models F$  ssi pour tout  $a_0 \in M$ ,  $v' \models G$ , où  $v'$  est la valuation telle que  $v'(x_0) = a_0$ , et  $v'(x) = v(x)$  pour tout  $x \neq x_0$ .
  - ▶ si  $F$  est de la forme  $\exists x_0 G(x_0, x_1, \dots, x_k)$ , alors  $v \models F$  ssi pour un certain  $a_0 \in M$ ,  $v' \models G$ , où  $v'$  est la valuation telle que  $v'(x_0) = a_0$ , et  $v'(x) = v(x)$  pour tout  $x \neq x_0$ .

- Pour une formule close  $F$ , la satisfaction de  $F$  dans la structure  $\mathfrak{M}$  ne dépend pas de la valuation  $v$ .
- On dit alors que  $\mathfrak{M}$  est un modèle de  $F$ , lorsque  $F$  est satisfaite sur  $\mathfrak{M}$ .

## Théories

- Une **théorie**  $\mathcal{T}$  est un ensemble de formules closes sur une signature donnée. Les formules d'une théorie sont appelées des **axiomes** de cette théorie.
- Une structure  $\mathfrak{M}$  est un **modèle de la théorie**  $\mathcal{T}$  si  $\mathfrak{M}$  est un modèle de chacune des formules de la théorie.
- Une théorie est dite **consistante** si elle possède un modèle.

## Groupe

- Un groupe est un modèle égalitaire<sup>3</sup> de la théorie constituée des deux formules :

$$\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z \quad (1)$$

$$\exists e \forall x \ (x * e = e * x = x \wedge \exists y (x * y = y * x = e)) \quad (2)$$

sur la signature  $\Sigma = (\emptyset, \{*\}, \{=\})$ , où  $*$  et  $=$  sont d'arité 2.

3. On impose à l'interprétation de  $=$  de correspondre à l'égalité.

## Corps

- Un **corps commutatif** est un modèle égalitaire de la théorie constituée des formules

$$\forall x \forall y \forall z \ (x + (y + z)) = (x + y) + z \quad (3)$$

$$\forall x \forall y \ (x + y = y + x) \quad (4)$$

$$\forall x \ (x + 0 = x) \quad (5)$$

$$\forall x \exists y \ (x + y = 0) \quad (6)$$

$$\forall x \forall y \forall z \ x * (y + z) = x * y + x * z \quad (7)$$

$$\forall x \forall y \forall z \ ((x * y) * z) = (x * (y * z)) \quad (8)$$

$$\forall x \forall y \ (x * y = y * x) \quad (9)$$

$$\forall x \ (x * 1 = x) \quad (10)$$

$$\forall x \exists y \ (x = 0 \vee x * y = 1) \quad (11)$$

$$-1 = 0 \quad (12)$$

sur une signature avec deux symboles de constantes 0 et 1, deux symboles de fonctions + et \* d'arité 2, et le symbole de relation = d'arité 2.

## Le prochain épisode : le monde est beau

- On peut construire un (des) système(s) de preuve valide(s) et complet(s) :

- ▶ Notons :  $\mathcal{T} \vdash F$  pour " $F$  se prouve à partir de  $\mathcal{T}$ " dans ce système.
- ▶ Notons :  $\mathcal{T} \models F$  pour "tout modèle de  $\mathcal{T}$  est un modèle de  $F$ ."

- C'est-à-dire :

### Théorème (Validité)

*Soit  $\mathcal{T}$  une théorie. Soit  $F$  une formule close.  
Si  $\mathcal{T} \vdash F$  alors  $\mathcal{T} \models F$ .*

### Théorème (Complétude)

*Soit  $\mathcal{T}$  une théorie. Soit  $F$  une formule close.  
Si  $\mathcal{T} \models F$  alors  $\mathcal{T} \vdash F$ .*

Exprimez vous.



Page du cours.



Commentaires, avis  
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:  
<https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=19276>.
- Commentaires, avis sur les cours et les PCs.  
[www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS](http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS).

ANNEXES

- Démonstration par la topologie (du sens non-trivial de la version 1 du théorème de compacité).
  - ▶ L'espace topologique  $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$  (muni de la topologie produit) est un espace compact, car il s'obtient comme un produit de compacts (Théorème de Tychonoff).
  - ▶ Pour chaque formule propositionnelle  $F \in \Sigma$ , l'ensemble  $\overline{F}$  des valuations qui la satisfont est un ouvert dans  $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$ , car la valeur de vérité d'une formule ne dépend que d'un nombre fini de variables, celles qui apparaissent dans la formule.
  - ▶ Il est également fermé puisque celles qui ne satisfont pas  $F$  sont celles qui satisfont  $\neg F$ .
  - ▶ Dire que  $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$  est compact est équivalent à dire que de toute famille de fermés dont l'intersection est vide on peut extraire une famille finie dont l'intersection est aussi vide ((complémentaire de la) propriété de Borel-Lebesgue).
  - ▶ L'hypothèse du théorème entraîne que toute intersection d'un nombre fini de  $\overline{F}$  pour  $F \in \Sigma$  est non-vide.
  - ▶ L'intersection de tous les  $\overline{F}$  pour  $F \in \Sigma$  est donc non vide, ce qui prouve le résultat.

← Retour

- Démonstration sans topologie du théorème de compacité :
  - ▶ Considérons  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots\}$  une énumération de  $\mathcal{P}$ .
  - ▶ Lemme : supposons qu'il existe une application  $v$  de  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  dans  $\{0,1\}$  telle que tout sous-ensemble fini de  $\Sigma$  ait un modèle dans lequel  $p_1, \dots, p_n$  prennent les valeurs  $v(p_1), \dots, v(p_n)$ . Alors on peut étendre  $v$  à  $\{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\}$  avec la même propriété.
    - En effet, si  $v(p_{n+1}) = 0$  ne convient pas, alors il existe un ensemble fini  $U_0$  de  $\Sigma$  qui ne peut pas être satisfait quand  $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$  prennent les valeurs respectives  $v(p_1), \dots, v(p_n)$  et 0.
    - Si  $U$  est un sous-ensemble fini quelconque de  $\Sigma$ , alors d'après l'hypothèse faite sur  $v$ ,  $U_0 \cup U$  a un modèle dans lequel  $p_1, \dots, p_n$  prennent les valeurs  $v(p_1), \dots, v(p_n)$ .
    - Dans ce modèle, la proposition  $p_{n+1}$  prend donc la valeur 1. Autrement dit, tout sous-ensemble fini  $U$  de  $\Sigma$  a un modèle dans lequel  $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$  prennent les valeurs respectives  $v(p_1), \dots, v(p_n)$  et 1.
    - Dit encore autrement, soit  $v(p_{n+1}) = 0$  convient auquel cas on peut fixer  $v(p_{n+1}) = 0$ , soit  $v(p_{n+1}) = 0$  ne convient pas auquel cas on peut fixer  $v(p_{n+1}) = 1$  qui convient.

- ▶ En utilisant ce lemme, on définit ainsi une valuation  $v$  telle que, par récurrence sur  $n$ , pour chaque  $n$ , tout sous-ensemble fini de  $\Sigma$  a un modèle dans lequel  $p_1, \dots, p_n$  prennent les valeurs  $v(p_1), \dots, v(p_n)$ .
- ▶ Il en résulte que  $v$  satisfait  $\Sigma$  :
  - En effet, soit  $F$  une formule de  $\Sigma$ .
  - $F$  ne dépend que d'un ensemble fini  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$  de variables propositionnelles (celles qui apparaissent dans  $F$ ).
  - En considérant  $n = \max(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , chacune de ces variables  $p_{i_j}$  est parmi  $\{p_1, \dots, p_n\}$ .
  - Nous savons alors que le sous ensemble fini  $\{F\}$  réduit à la formule  $F$  admet un modèle dans lequel  $p_1, \dots, p_n$  prennent les valeurs  $v(p_1), \dots, v(p_n)$ , i.e.  $F$  est satisfaite par  $v$ .

[← Retour](#)