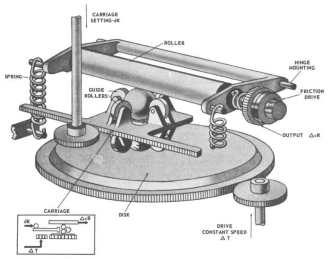
Cours 10: Autres complexités



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr
INF412
Ecole Polytechnique
CSC_INF41012_EP

Théorèmes de hiérarchie

Théorème (de Hiérarchie)

Soient $f, f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ des fonctions constructibles en temps telles que $f(n)\log(f(n)) = o(f'(n))$. Alors l'inclusion $\mathrm{TIME(f)} \subsetneq \mathrm{TIME(f')}$ *est stricte.*

- On dit qu'une fonction $f(n) \geq n\log(n)$ est constructible en temps si la fonction qui envoie 1^n sur la représentation binaire de $1^{f(n)}$ est calculable en temps $\mathcal{O}(f(n))$:
  - toutes les fonctions usuelles le sont.

Corollaire

$$\mathrm{TIME}(n^2) \subsetneq \mathrm{TIME}(n^{\log n}) \subsetneq \mathrm{TIME}(2^n).$$

- On obtient :

$$\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}.$$

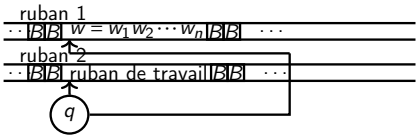
où

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{n^c}).$$

- Preuve :
  - Tout polynôme devient ultimement négligeable devant $n^{\log n}$, et donc P est un sous-ensemble de $\mathrm{TIME}(n^{\log n})$.
  - Maintenant $\mathrm{TIME}(n^{\log n})$, qui contient tout P est un sous-ensemble strict de, par exemple, $\mathrm{TIME}(2^n)$, qui est inclus dans EXPTIME.

Complexité en espace mémoire

- On souhaite mesurer la mémoire utilisée par un algorithme.
  - En théorie de la complexité, on parle plutôt **d'espace**, ou **d'espace mémoire**, pour désigner la mémoire.
  - Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction.
    On définit : SPACE(t(n)) comme la classe des problèmes (langages) qui sont décidés par une machine de Turing qui utilise deux rubans :
    - le premier ruban contient l'entrée est accessible **en lecture seulement** : il peut être lu, mais il ne peut pas être écrit ;
    - le second est lui initialement vide et est accessible en lecture et écriture ;
    - en utilisant $\mathcal{O}(t(n))$ cases du **second** ruban, où n est la taille de l'entrée.



- PSPACE est la classe des problèmes (langages) décidés en espace polynomial :

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{SPACE}(n^k).$$

- Cette notion d'espace mémoire ne dépend pas réellement du modèle de calcul utilisé :
  - l'utilisation des machines de Turing comme modèle de base est arbitraire.

Classes les plus usuelles

$$\text{LOGSPACE} = \text{SPACE}(\log n)$$

$$\text{NLOGSPACE} = \text{NSPACE}(\log n)$$

$$\text{P} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{TIME}(n^c)$$

$$\text{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(n^c)$$

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{SPACE}(n^c)$$

Relations triviales

Théorème

$$\text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n)).$$

Théorème

$$\text{TIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n)).$$

Conséquences :

- $\text{PSPACE} \subseteq \text{NPSPACE}$,
- $\text{P} \subseteq \text{PSPACE}$.

- Démonstration :
  - Une machine de Turing déterministe est une machine de Turing non-déterministe particulière.
  - Une machine de Turing écrit au plus un nombre fini d'emplacements (mémoire) à chaque étape.

Théorème

Pour tout langage de NTIME(f(n)), *il existe un entier* c *tel que ce langage soit dans* TIME($c^{f(n)}$).

Si l'on préfère :

$$\text{NTIME(f(n))} \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{TIME}(c^{f(n)}).$$

- Démonstration :
  - Soit L un problème de NTIME(f(n)).
  - On sait qu'il existe un problème A tel que pour déterminer si un mot w de longueur n est dans L, il suffit de savoir s'il existe un certificat $u \in \Sigma^*$ avec $(w,u) \in A$, ce dernier test pouvant se faire en temps $f(n)$, où $n = \textit{longueur}(w)$.
  - On peut se limiter aux mots u de longueur $\mathcal{O}(f(n))$.
  - Tester si $(w,u) \in A$ pour tous les mots $u \in \Sigma^*$ de longueur $f(n)$ se fait facilement en temps $\mathcal{O}\left(c^{f(n)}\right) + \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}\left(c^{f(n)}\right)$, où $c > 1$ est le cardinal de l'alphabet Σ.

Remarque

- Pour écrire un mot u de longueur $f(n)$, il faut que f ne soit pas quelconque :
  - par exemple calculable ! ! !
- En fait, on se limite aux bornes sur le temps et l'espace qui sont **de complexité propre** :
  - on suppose que la fonction $f(n)$ est croissante, c'est-à-dire que $f(n+1) \geq f(n)$,
  - et qu'il existe un algorithme qui prend en entrée w et qui produit en sortie $1^{f(n)}$ en temps $\mathcal{O}(n + f(n))$
  - et en espace $\mathcal{O}(f(n))$, où $n = \textit{longueur}(w)$.
- Toutes les fonctions usuelles non-décroissantes, comme $\log(n)$, n, n^2, $\cdots$, $n \log n$, $n!$ vérifient ces propriétés.
- Cette hypothèse sera implicite dans la suite.

Temps non-déterministe vs espace

Théorème

$$\text{NTIME(f(n))} \subseteq \text{SPACE(f(n))}.$$

Conséquences :

- NP $\subseteq$ PSPACE

- Démonstration :
  - On utilise exactement le même principe que dans la preuve précédente, si ce n'est que l'on parle d'espace.
  - Soit L un problème de NTIME(f(n)).
  - On sait qu'il existe un problème A tel que pour déterminer si un mot w de longueur n est dans L, il suffit de savoir s'il existe $u \in \Sigma^*$ de longueur $f(n)$ avec $(w,u) \in A$.
  - On utilise un espace $\mathcal{O}(f(n))$ pour générer un à un les mots $u \in \Sigma^*$ de longueur $f(n)$ puis on teste pour chacun si $(w,u) \in A$, ce dernier test se faisant en temps $f(n)$, donc espace $f(n)$.
  - Le même espace pouvant être utilisé pour chacun des mots u, au total cela se fait au total un espace $\mathcal{O}(f(n))$ pour générer les $u + \mathcal{O}(f(n))$ pour les tests, soit $\mathcal{O}(f(n))$.

Lien fondamental avec le problème REACH

- Le problème de décision REACH,
  - on se donne
    1. un graphe orienté $G = (V,E)$,
    2. deux sommets u et v,
  - et on cherche à décider s'il existe un chemin entre u et v dans G.

jouera un grand rôle.

Lien fondamental avec le problème REACH

- A toute machine de Turing M est associé un graphe orienté G_M
  - dont les sommets sont les configurations,
  - et tel qu'il y a une arête entre la configuration C et la configuration C' ssi $C \vdash C'$.
    - c.-à-d. : ssi on peut passer en une étape de la configuration C en la configuration C'.
- Etant donnée une entrée w, on note $C[w]$ la configuration initiale correspondante. On peut supposer qu'il y a une unique configuration terminale acceptante C^*.
  - si on fixe la longueur n de l'entrée w, pour un calcul en espace $f(n)$, il y a moins de $\mathcal{O}\left(c^{f(n)}\right)$ sommets dans ce graphe G_M, où $c > 1$ est le cardinal de l'alphabet de M.
- Soit L accepté par M.

  $w \in L$ si et seulement si $(G_M, C[w], C^*) \in$ REACH.
- On va écrire ce que l'on sait sur le problème REACH.

- REACH se résout par exemple en temps et espace $\mathcal{O}(n^2)$, où n est le nombre de sommets, par un parcours en profondeur.

Conséquence

Théorème
Si $f(n) \geq \log n$, *alors*

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{TIME}(c^{f(n)}).$$

Proposition

$$\text{REACH} \in \text{SPACE}(\log^2 n).$$

Astuce du théorème de Savitch

- Démonstration :
  - Soit $G = (V, E)$ le graphe orienté en entrée.
  - Étant donnés deux sommets x et y de ce graphe, et i un entier, on note $CHEMIN(x, y, i)$ si et seulement s'il y a un chemin de longueur inférieure à 2^i entre x et y.
  - On a $(G, u, v) \in \text{REACH}$ si et seulement si $CHEMIN(u, v, \log(n))$, où n est le nombre de sommets.
  - L'astuce est de calculer $CHEMIN(x, y, i)$ récursivement en observant que l'on a $CHEMIN(x, y, i)$ si et seulement s'il existe un sommet intermédiaire z tel que $CHEMIN(x, z, i-1)$ et $CHEMIN(z, y, i-1)$. On teste alors à chaque niveau de la récursion chaque sommet possible z.
  - Pour représenter chaque sommet, il faut $\mathcal{O}(\log(n))$ bits. Cela donne une récurrence de profondeur $\log(n)$, chaque étape de la récurrence nécessitant uniquement de stocker un triplet x, y, i et de tester chaque z de longueur $\mathcal{O}(\log(n))$. Au total, on utilise donc un espace $\mathcal{O}(\log(n)) * \mathcal{O}(\log(n)) = \mathcal{O}\left(\log^2(n)\right)$.

Conséquence : Théorème de Savitch

Théorème (Savitch)
Si $f(n) \geq \log(n)$, *alors*

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n)^2).$$

- On utilise l'algorithme précédent pour déterminer s'il y a un chemin dans le graphe G_M entre $C[w]$ et C^*.
- On remarquera que l'on a pas besoin de construire explicitement le graphe G_M mais que l'on peut utiliser l'algorithme précédent à la volée.

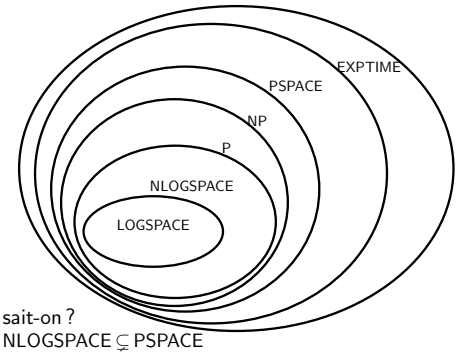
Théorème de Savitch

Corollaire

PSPACE = NPSPACE.

Le paysage de la complexité

- LOGSPACE ⊆ NLOGSPACE ⊆ P ⊆ NP ⊆ PSPACE ⊆ EXPTIME.



- Que sait-on ?
  - NLOGSPACE ⊊ PSPACE
  - P ⊊ EXPTIME,
  - on ne sait pas lesquelles des inclusions intermédiaires sont strictes

Digression : Exercice

- Produire un problème PSPACE-complet (pour ≤).
  - Problème *ARTIFICIEL2*:

Donnée: • Le codage $\langle M \rangle$ d'une machine de Turing M
• 1^t, un entier écrit en unaire
• et un mot w.

Réponse: Décider si la machine M accepte le mot w en espace t

  - Il est dans PSPACE.
  - Il est PSPACE-difficile :
    - Soit A un problème de PSPACE : il est reconnu par une machine de Turing M en espace $p(n)$.
    - La fonction f qui à w associe $(\langle M \rangle, 1^{p(|w|)}, w)$ vérifie $w \in A$ ssi $f(w) \in$ ARTIFICIEL2.
    - La fonction f est calculable en temps polynomial.
    - On a donc bien $A \leq$ ARTIFICIEL2.

Un problème PSPACE-complet naturel

- Problème QBF (*QuantifiedBooleanFormula*):

Donnée: Une formule du calcul propositionnel en forme normale conjonctive ϕ

Réponse: déterminer si $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \phi(x_1, \cdots, x_n)$? où $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont les variables de ϕ.

> Théorème
> *Le problème* QBF *est* PSPACE*-complet.*

- Le problème QBF est dans PSPACE car il est facile de construire un algorithme récursif qui le résout :
  - pour une formule de la forme $\exists x_1 \phi$ (respectivement : $\forall x_1 \phi$) on fixe la valeur de x_1 à 0, on propage cette valeur pour x_1 dans ϕ pour obtenir $\phi_{x_1=0}$,
    - et on s'appelle récursivement pour savoir si la formule $\phi_{x_1=0}$ est satisfiable.
  - On fixe alors la valeur de x_1 à 1, on propage cette valeur pour x_1 dans ϕ pour obtenir $\phi_{x_1=1}$,
    - et on s'appelle récursivement pour savoir si la formule $\phi_{x_1=1}$ est satisfiable.
  - On accepte si et seulement si $\phi_{x_1=0}$ ou (resp. et) $\phi_{x_1=1}$ sont satisfiables.
- L'algorithme fonctionne avec $\mathcal{O}(n)$ appels récursifs, chacun utilisant un espace constant, et donc en espace total $\mathcal{O}(n)$, où n est la taille de la formule.

- Pour montrer qu'il est complet
  - Supposons que le problème L soit accepté en espace polynomial.
  - On appelle G_M le graphe des configurations de la machine de Turing M, avec un arc entre deux configurations si l'une est successeur directe de l'autre.
  - On va écrire par une formule quantifiée $\phi_i([C],[C'])$ le fait qu'il existe un chemin de longueur inférieure à 2^i dans le graphe G_M entre les configurations C et C'. Le graphe G_M est de taille $2^{p(n)}$ pour un certain polynôme p, où $n = longueur(w)$.
  - Cette formule s'obtient par récurrence sur i. Pour $i = 0$, c'est la formule qui donne les arcs du graphe G_M.
  - Pour $i > 0$, on a envie d'écrire $\phi_i([C],[C'])$ comme

$$\exists [C''] \ \phi_{i-1}([C],[C'']) \wedge \phi_{i-1}([C''],[C']).$$

Cependant si l'on fait ainsi, la formule obtenue sera de taille exponentielle en i.

- L'idée est de quantifier en réutilisant l'espace : on écrit $\phi_i([C],[C'])$ comme

$$\exists [C''] \forall [D_1] \forall [D_2] \ \phi'_i([C],[C'],[D_1],[D_2],[C''])$$

où $\phi'_i([C],[C'],[D_1],[D_2],[C''])$ teste la relation

$$(([D_1] = [C] \wedge [D_2] = [C'']) \vee (([D_1] = [C''] \wedge [D_2] = [C'])$$

$$\Rightarrow \phi_{i-1}([D_1],[D_2]).$$

- Cette fois la taille de ϕ_i sera de l'ordre de celle de ϕ_{i-1} plus $\mathcal{O}(p(n))$. Un mot w est dans le langage L si et seulement si $\phi_{p(n)}([C[w]],[C^*])$.
- La fonction qui à w associe la formule quantifiée $\phi_{p(n)}([C[w]],[C^*])$ est bien calculable en temps polynomial.

D'autres problèmes PSPACE-complets.

- Les jeux stratégiques donnent naturellement naissance à des problèmes PSPACE-complets.
  - Par exemple, le jeu GEOGRAPHY est PSPACE-complet :
    - On joue sur un graphe orienté $G = (V, E)$.
    - Le joueur 1 choisit un sommet u_1 du graphe. Le joueur 2 doit alors choisir un sommet v_1 tel qu'il y ait un arc de u_1 vers v_1. C'est alors au joueur 1 de choisir un autre sommet u_2 tel qu'il y ait un arc de v_1 vers u_2, et ainsi de suite.
    - On n'a pas le droit de repasser deux fois par le même sommet.
    - Le premier joueur qui ne peut pas continuer le chemin $u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots$ perd.
    - Le problème GEOGRAPHY consiste à déterminer étant donné un graphe G et un sommet de départ pour le joueur 1, s'il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1.

Jouer aux échecs ? au go ?

- Problème ECHEC:

Donnée: Une configuration aux échecs.
Réponse: Décider si les blancs ont une stratégie gagnante.

- Décidable ? Complexité ?
  - Un échiquier est une grille 8×8. Il y a donc un nombre fini de configurations possibles.
  - Il y a donc un nombre fini de configurations $C_1, C_2, \cdots, C_m$ gagnantes.
  - L'algorithme qui consiste à répondre *VRAI* si la configuration en entrée est C_1 ou C_2 ou $\ldots C_m$ fonctionne en utilisant un espace mémoire et un temps $\mathcal{O}(1)$.
- Le problème ECHEC est donc trivial [1] du point de vue de la complexité :
  - il est dans SPACE(1), TIME(1).
- Même chose pour le GO qui se joue sur une grille 19×19.

1. Attention : on cherche en complexité/calculabilité un algorithme qui résout le problème de décision, et on n'impose pas "plus", en particulier de savoir "produire efficacement" cet algorithme

GO généralisé

- La grille est constituée de $n \times n$ points.
- Problème GO:

Donnée: Une configuration de GO sur un échiquier $n \times n$ et un entier $1 \leq k \leq n^2$.
Réponse: Décider si les blancs ont une stratégie gagnante qui mène en $n^2 - k$ étapes à un échiquier où les noirs sont complétement éliminés.

> **Théorème**
> GO *est* PSPACE-*complet*.

- Principe :
  - GO est dans PSPACE.
  - GEOGRAPHY $\leq$ GO :
    - voir par exemple Christos H. Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994. p462.
    - et sur les jeux et leur complexité, plus généralement R. A. Hearn, E. D. Demaine Games, Puzzles, and Computation. A.K. Peters/CRC Press. 2009.

Autres complexités

- Complexité parallèle.
- Complexité randomisée.
- Complexité quantique.
- ...

Quelques saveurs de la complexité parallèle

- Thèse du parallèlisme :
  - Le temps parallèle polynomial [2] correspond à l'espace polynomial (PSPACE).
  - Le temps parallèle polylogarithmique [3] correspond à l'espace polylogarithmique ($\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{SPACE}(\log^k n)$).

2. Sans contrainte sur le nombre de processeurs, c'est-à-dire possiblement un nombre exponentiel de processeurs
3. Possiblement un nombre polynomial de processeurs

Problèmes "intrinsèquement non-parallélisables"

- On considère souvent dans le parallèlisme que : "Se parallélise bien"= temps parallèle polylogarithmique.
  - $\text{NC} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{SPACE}(\log^k n) \subseteq \text{P}$.
- On ne sait pas si $\text{NC} = \text{P}$.
  - Si $\text{NC} \neq \text{P}$ (comme cela est généralement conjecturé), les problèmes de P les plus difficiles à paralléliser doivent contenir les problèmes P-complets :
- En parallèlisme, on dit parfois qu'un problème est **non-parallélisable** s'il est P-difficile [4].

4. Pour un préordre $\leq_L$ défini comme $\leq$ (respectivement : $\leq_m$) en remplaçant "calculable en temps polynomial" (resp. calculable) par "calculable en espace logarithmique".

Problèmes P-difficiles [5]

- Évaluation en calcul propositionnel

Donnée: Une formule $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ du calcul propositionnel en forme normale conjonctive, des valeurs $x_1, \cdots, x_n \in \{0,1\}$ pour chacune des variables de la formule.
Réponse: Décider si la formule F s'évalue à vrai pour ces valeurs des variables.

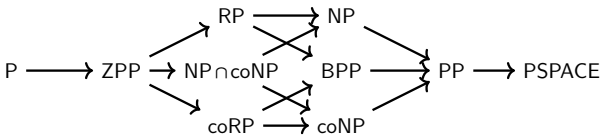
- Evaluation d'une suite booléenne

Donnée: Une suite de n équations booléennes du type $e_1 = 0$, $e_1 = 1$, et $e_k = e_i \wedge e_j$ ou $e_k = e_i \vee e_k$, pour $1 \leq j < k \leq n$
Réponse: Calculer la valeur de e_n

5. pour $\leq_L$

Résumé

Chaque flèche correspond à une inclusion :



- ZPP correspond aux problèmes qui sont reconnus par un algorithme qui termine toujours avec une réponse correcte et qui termine en temps moyen polynomial en la taille de l'entrée.
- BPP correspond aux problèmes qui sont reconnus par un algorithme qui termine toujours en temps polynomial mais possiblement avec une erreur bornée par $\epsilon > 0$.

Exemple de problème BPP : Tester la nullité d'un polynôme

- On va présenter un test probabiliste pour lequel aucun algorithme déterministe aussi efficace n'est connu.
- Le but de ce test est de déterminer si un polynôme $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de degré faible à coefficients entiers est identiquement nul.
- On suppose que p est donné sous la forme d'un circuit arithmétique sur la structure $(\mathbb{R}, +, -, *)$.
  - On peut bien entendu vérifier cette propriété en développant le polynôme p et en vérifiant que chacun des termes du développement du polynôme est bien nul,
  - mais cela peut prendre un temps exponentiel dans le pire cas.

Algorithme randomisé

- Evaluer p en des points $a_1, a_2, \cdots, a_n$ choisis aléatoirement.
- Si p est identiquement 0, alors $p(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$.
- Sinon, on s'attend à ce que $p(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$ avec grande probabilité.

- Cela marche en fait aussi si l'on travaille sur un corps fini, si le corps est suffisamment grand.

Proposition (Lemme de Schwartz-Zippel)

Soit $\mathbb{F}$ un corps, et $S \subseteq \mathbb{F}$ un sous-ensemble arbitraire. Soit $p(\mathrm{x})$ un polynôme non nul des n variables $\mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de degré total d à coefficients dans $\mathbb{F}$. Alors l'équation $p(\mathrm{x}) = 0$ possède au plus $d|S|^{n-1}$ solutions dans S^n.

Autrement dit, soit $\mathbb{F}$ un corps. Soit $p(x_1, \cdots, x_n)$ un polynôme non nul de degré total d à coefficients dans $\mathbb{F}$. Si p est évalué sur un élément choisi uniformément parmi les points de S^n, alors

$$\Pr(p(s_1, \cdots, s_n) = 0) \leq \frac{d}{|S|}.$$

Application : Problème du couplage parfait

- Un graphe biparti est un graphe dont les sommets peuvent se partitionner en deux sous-ensembles U et V tels que chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V.
- Un couplage parfait dans un graphe biparti est un sous-ensemble d'arêtes M tel que
  1. les arêtes de M ne partagent pas de sommets ;
  2. chaque sommet est l'extrémité d'une arête de M.
- On connaît un algorithme polynomial pour déterminer si un graphe biparti possède un couplage parfait.
- On ne sait pas si le problème est dans NC (se résout en temps parallèle polylogarithmique).

Algorithme NC randomisé

- On affecte à chaque arête (i,j) de G une variable $x_{i,j}$ et on considère la matrice d'adjacence X de taille $n \times n$ avec ces indéterminées plutôt que 1.
- Le déterminant $\det(X)$ est un polynôme de degré n en les variables $x_{i,j}$, avec un terme (non nul) pour chaque couplage parfait.
- G possède un couplage parfait si et seulement si le polynôme $\det(X)$ ne s'annule pas.

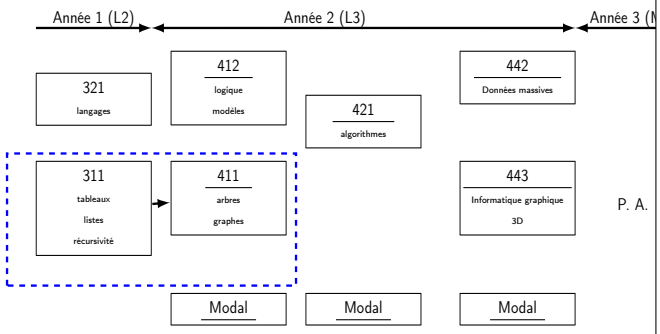
Algorithme NC randomisé

- Cela est difficile à vérifier de façon déterministe, car $\det(X)$ peut être de grande taille.
- On peut le vérifier de façon probabiliste
  - en choisissant des valeurs pour les $x_{i,j}$ dans un corps $\mathbb{F}$ de taille suffisamment grande (par exemple dans $\mathbb{F}_p$, avec p un nombre premier plus grand que $2n$).
  - On calcule alors le déterminant, et on teste s'il est nul. Si le graphe ne possède pas de couplage parfait, cela se produira à coup sûr.
  - Si le graphe possède un couplage parfait, alors cela se produira avec probabilité au plus $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Complexité quantique

- BQP : correspond aux problèmes solvables par un ordinateur quantique en temps polynomial, avec une probabilité d'erreur bornée par $\epsilon > 0$.
- Exemples :
  - Factorisation (Algorithme de Shor)
  - Logarithme Discret
  - ...

- Ceci est le dernier cours de CSC_INF41012_EP
- MERCI.
  - pour votre attention.
  - pour vos retours.



P. A.

Suites naturelles de ce cours en 3A

- 3A :
  - **CSC_51051_EP (Logique, Preuve) "INF551 - Computational Logic : from Artificial Intelligence to Zero Bugs"**
  - PA Math-Info, autres PA.
  - Cours d'algorithmique ("CSC_51050_EP - Advanced Algorithms", INF561, INF573, ...)
  - **Stages en laboratoire possibles ! ! ! ! (Logique, Calculabilité, Complexité,...).** Contact : bournez@lix.polytechnique.fr, or other members of the pedagogical team.
  - **Stages de recherche (Logique, Calculabilité, Complexité,...).**
- 4A
- 5A, 6A, ...

La pale

- Tous les documents (poly, copie des transparents, notes) sont autorisés.
- Quand on demande un algorithme : du code haut niveau suffit.
- Le poly est un sur-ensemble de ce que nous avons vu en amphis.
- Réviser les PCs.

Le sondage

- c'est IMPORTANT.