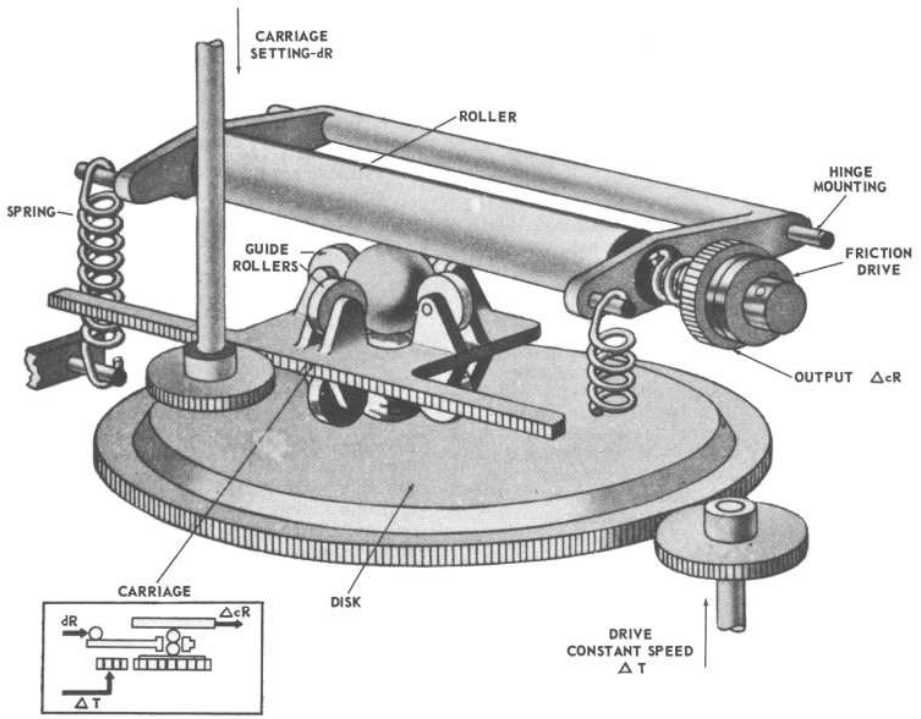
Fondements de l'informatique



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr

Ecole Polytechnique
CSC_INF41012_EP

Plan du cours :

- Logique : 1,2,3,4
  - Calcul propositionnel.
  - Calcul des prédicats.
- Modèles : 4,5,6,7
  - Machines de Turing.
  - Thèse de Church-Turing.
  - Calculabilité.
- Calculs : 7,8,9,10
  - Complexité en temps :
    - la question $P = NP$?
    - NP-complétude.
  - Complexité en espace.
  - Gérer la complexité.

Organisation du cours

- 10 blocs, soit 10 mardis/mercredis.
  - Le mardi après midi, amphi Cauchy, de 15h15 à 16h45.
  - Le mercredi matin, PC, de 8h00 à 10h00 ou de 10h15 à 12h15.

Samuel Mimram,
Gr1-3,
PC 42

Noam Zeilberger,
Gr2-4,
PC 44

- Page du cours SUR MOODLE

  https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=19276

  et vos questions à `Olivier.Bournez@polytechnique.fr` et/ou aux enseignants de l'équipe.

- Évaluation.
  - Une PC notée : la PC 6, **le 2 Octobre 2024**.
  - Contrôle à la fin.
  - Note de module : $\max(CC, \frac{3}{4}CC + \frac{1}{4}PC)$.

Délégués

Les noms de deux délégué(e)s ?

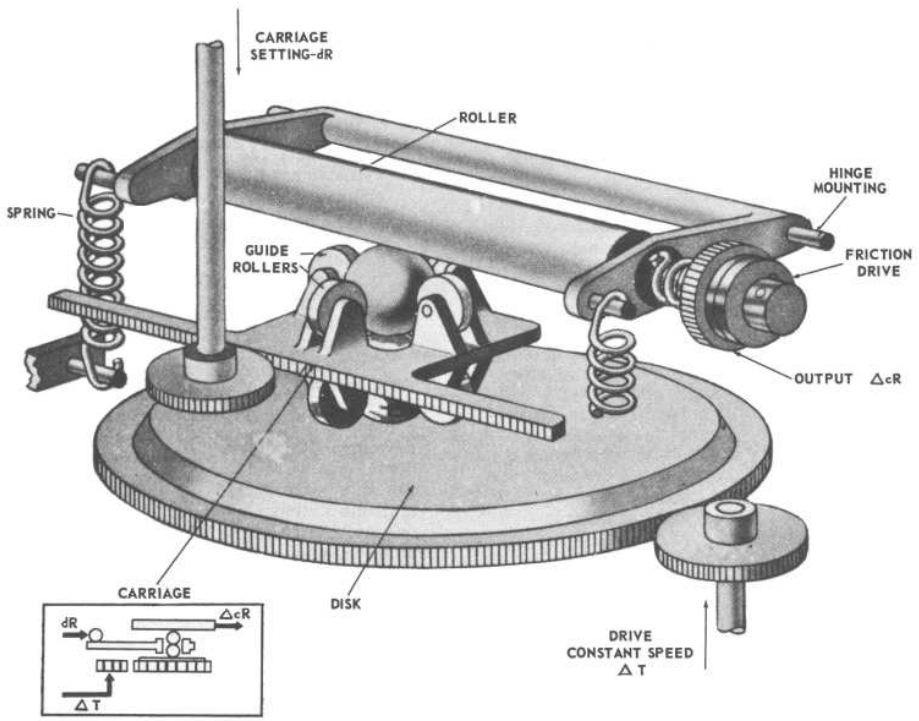
Exprimez vous.

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:
  https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=19276.
- Commentaires, avis sur les cours et les PCs.
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

Cours 1 : Motivation. Récursivité et induction. Calcul Propositionnel



Olivier Bournez
bournez@lix.polytechnique.fr
Ecole Polytechnique

Au menu

Présentation du cours

Calcul propositionnel : première présentation

Retour sur quelques concepts de base de l'informatique

Récursivité et induction

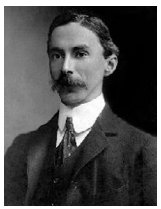
Calcul propositionnel

Plus précisément

Présentation du cours
Un peu d'histoire
Pourquoi ce cours

Fondements des mathématiques

Cantor



Russel

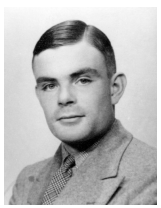
Hilbert

- Fin du 19ème siècle :
  - Théorie des ensembles de Cantor.
- Début du 20ème siècle :
  - Des paradoxes apparaissent :
    - Russel : $y = \{x | x \notin x\}$ est-il un ensemble ?
  - Hilbert propose de **fonder les mathématiques** :
    c'est-à-dire, de proposer un langage et des axiomes permettant d'exprimer toutes les mathématiques, avec
    - **Complétude** : une preuve que tout énoncé mathématique vrai peut se prouver dans le formalisme ;
    - **Cohérence** : une preuve qu'aucune contradiction ne peut être obtenue ;
    - **Décidabilité** : décider si un énoncé est vrai ou faux doit s'obtenir par une certaine **méthode (algorithme)**.

Fondements des mathématiques

Gödel

Church



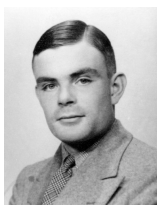
Turing

- 1931 : Gödel prouve **les théorèmes d'incomplétude**.
  - toute théorie cohérente suffisamment expressive pour parler des entiers et de la multiplication des entiers ne peut pas prouver sa propre cohérence.
- Années 1930 :
  - On cherche alors à formaliser la notion **d'algorithme.**
    - Fonctions récursives : Gödel.
    - Lambda-calcul : Church, 1936.
    - Machines de Turing : Turing, 1936.
  - **Thèse de Church-Turing :** tous ces modèles sont équivalents.

Fondements de l'informatique

Gödel

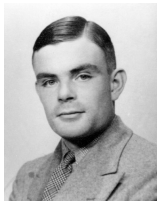
Church



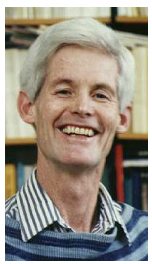
Turing

- 1931 : Gödel prouve **les théorèmes d'incomplétude**.
  - toute théorie cohérente suffisamment expressive pour parler des entiers et de la multiplication des entiers ne peut pas prouver sa propre cohérence.
- Années 1930 :
  - On cherche alors à formaliser la notion **d'algorithme.**
    - Fonctions récursives : Gödel.
    - Lambda-calcul : Church, 1936.
    - Machines de Turing : Turing, 1936.
  - **Thèse de Church-Turing :** tous ces modèles sont équivalents.

Fondements de l'informatique



Turing



Cook

Levin

- Depuis 1936 : Théorie de la **calculabilité.**
  - Plusieurs problèmes naturels s'avèrent ne pas être solvables. Par exemple :
    - vérification, 10ème problème de Hilbert, simplification en calcul formel, ...
- 1970 : Théorie de la **complexité** (moderne).
  - Notion de NP-complétude.
  - Question $P = NP$?
- 21ème siècle :
  - La question $P = NP$? est parmi les 4-questions pour le millénaire.
  - Mise à prix à 1.000.000 de dollars.
  - Tous les modèles restent d'actualité, et sont à la base de nos modèles informatiques actuels.

Plus précisément

Présentation du cours
- Un peu d'histoire
- Pourquoi ce cours

- Un cours sur trois domaines centraux en informatique :
  1. **la logique,**
  2. **les modèles de calculs,**
  3. **la complexité**,

- reliés par la question suivante :

  Quelles sont les capacités et les limites des ordinateurs ?

Question principale du cours

Question principale : **Comprendre qu'est-ce qui rend certains problèmes difficiles, et d'autres faciles ?**

- Comprendre pourquoi
  - certains problèmes se résolvent très vite :

    exemple : un téléphone portable moderne peut trier un répertoire de plus d'un million d'entrées en quelques minutes.
  - d'autres sont difficiles à résoudre :

    exemple : résoudre un problème d'emploi du temps peut prendre des siècles à résoudre avec seulement un millier de données en entrées, même avec les ordinateurs les plus puissants actuels.

Pourquoi s'intéresser aux problèmes difficiles ?

Quelques histoires récentes :

- 370 millions de dollars :

- $\geq$ 475 millions de dollars :

$\frac{4195835}{3145727} =$

1.333739068902037589

- Parce que des problèmes très simples et concrets, et aux enjeux économiques considérables, en font partie.
- Pour comprendre comment simplifier ou modifier les problèmes pour qu'ils puissent être résolus.
- Pour concevoir des systèmes :
  - en évitant les difficultés :
    - conception, vérification, ...
  - en utilisant les difficultés :
    - cryptographie, ...

Au menu

Présentation du cours

Calcul propositionnel : première présentation

Retour sur quelques concepts de base de l'informatique

Récursivité et induction

Calcul propositionnel

Introduction

- La **logique propositionnelle** permet essentiellement de discuter des connecteurs grammaticaux comme la négation ($\neg$), la conjonction ($\wedge$) et la disjonction ($\vee$), en composant des propositions à partir de propositions données.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Elle permet essentiellement de parler de **fonctions booléennes**, c'est-à-dire de fonctions de $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. En effet, les variables, c'est-à-dire **les propositions**, ne peuvent prendre que deux valeurs, **vrai** (codé par 1) ou **faux** (codé par 0).

Syntaxe	Sémantique
■ Expressions arithmétiques : ▶ $((1+2)*3)$: ok. ▶ $+4($: pas ok.	■ ▶ 9
■ Formules propositionnelles : ▶ $((p \vee q) \wedge r)$: ok. ▶ $((q \wedge p) \Rightarrow q)$: ok. ▶ $\vee \Rightarrow \wedge p$: pas ok.	■ ▶ Une fonction de $\{0,1\}^3$ dans $\{0,1\}$: vaut par exemple 1 pour $(p,q,r) = (0,1,1)$. ▶ Une fonction de $\{0,1\}^2$ dans $\{0,1\}$

Au menu

Présentation du cours

Calcul propositionnel : première présentation

Retour sur quelques concepts de base de l'informatique

Récursivité et induction

Calcul propositionnel

- Il est utile[1] de lire **le polycopié**.
  - en particulier, le chapitre 1 rappelle les notions d'alphabet, mot, langage, graphe, arbres, ...,
  - qui doivent/devraient être connues.

1. voire nécessaire

Exemple : mots

- Un **alphabet** Σ est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés des **lettres**.
- Un **mot** w sur Σ est une suite finie d'éléments de Σ.
  - w s'écrit $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, avec $a_i \in \Sigma$.
  - $n \geq 0$ est **la longueur du mot**.
  - Le mot vide, noté ϵ, est (l'unique) mot de longueur 0.
- L'ensemble des mots sur Σ est noté Σ^*
- Un **langage** sur Σ est un ensemble de mots sur Σ (une partie de Σ^*).

Quelques opérations sur les mots

- Etant donnés deux mots m_1 et m_2, la concaténation de m_1 et de m_2, notée $m_1.m_2$, ou notée $m_1 m_2$, est le mot obtenu en mettant m_2 à la fin de m_1.
  - Exemple : $aba.ba$ est le mot $ababa$ sur $\Sigma = \{a, b\}$.
- La concaténation est une opération associative, avec un élément neutre, le mot vide ϵ.

Exemples de langages

- $\Sigma_{bin} = \{0, 1\}$:
  - $101101 \in \Sigma^*_{bin}$;
- $\Sigma_{nombre} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:
  - $1794 \in \Sigma^*_{nombre}$, $007 \in \Sigma^*_{nombre}$ et $101101 \in \Sigma^*_{nombre}$;
  - $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres entiers non-nuls écrits en base 10 ;
    - $1794 \in \mathcal{N}$, $101101 \in \mathcal{N}$, $007 \notin \mathcal{N}$.
- $\Sigma_{latin} = \{a, b, \cdots, z, A, B, \cdots, Z\}$:
  - $vocalise \in \Sigma^*_{latin}$ et $vczeerrztx \in \Sigma^*_{latin}$;
  - *Dico* le langage des mots d'un dictionnaire du français ;
    - $haricot \in Dico$, $sphf \notin Dico$.
- $\Sigma_{unicode}$ défini comme l'ensemble des caractères Unicode
  - génial, c'est la rentrée $\in \Sigma^*_{unicode}$:
  - *Francais* le langage des phrases valides du français.

- $\Sigma_{exp} = \{0,1,2,\cdots,9,+,-,*,/,(,)\}$ l'alphabet des expressions arithmétiques :
  - ((1+3)*2) $\in \Sigma_{exp}^*$ et ((+)+/3) $\in \Sigma_{exp}^*$.
  - *Arith* le langage des expressions arithmétiques.
    - ((1+3)*2) $\in$ *Arith*, +/3- $\notin$ *Arith*.
- Fixons un ensemble $\mathscr{P}$ de variables.
  $\Sigma_{prop} = \mathscr{P} \cup \{0,1,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,(,)\}$ est l'alphabet du calcul propositionnel sur $\mathscr{P}$: par exemple, pour $\mathscr{P} = \{p,q,r\}$:
  - $((r \vee p) \wedge q) \in \Sigma_{prop}^*$ et $p \vee q \wedge (\in \Sigma_{prop}^*$.
  - *Prop* le langage des formules propositionnelles.
    - $((r \vee p) \wedge q) \in$ *Prop*, $\vee p \wedge \notin$ *Prop*.

- $\Sigma_{exp} = \{0,1,2,\cdots,9,+,-,*,/,(,)\}$ l'alphabet des expressions arithmétiques :
  - ((1+3)*2) $\in \Sigma_{exp}^*$ et ((+)+/3) $\in \Sigma_{exp}^*$.
  - *Arith* le langage des expressions arithmétiques.
    - ((1+3)*2) $\in$ *Arith*, +/3- $\notin$ *Arith*.
- Fixons un ensemble $\mathscr{P}$ de variables.
  $\Sigma_{prop} = \mathscr{P} \cup \{0,1,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,(,)\}$ est l'alphabet du calcul propositionnel sur $\mathscr{P}$: par exemple, pour $\mathscr{P} = \{p,q,r\}$:
  - $((r \vee p) \wedge q) \in \Sigma_{prop}^*$ et $p \vee q \wedge (\in \Sigma_{prop}^*$.
  - *Prop* le langage des formules propositionnelles.
    - $((r \vee p) \wedge q) \in$ *Prop*, $\vee p \wedge \notin$ *Prop*.
- Comment définir *Arith* et *Prop* :

- $\Sigma_{exp} = \{0,1,2,\cdots,9,+,-,*,/,(,)\}$ l'alphabet des expressions arithmétiques :
  - ((1+3)*2) $\in \Sigma_{exp}^*$ et ((+)+/3) $\in \Sigma_{exp}^*$.
  - *Arith* le langage des expressions arithmétiques.
    - ((1+3)*2) $\in$ *Arith*, +/3- $\notin$ *Arith*.
- Fixons un ensemble $\mathscr{P}$ de variables.
  $\Sigma_{prop} = \mathscr{P} \cup \{0,1,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,(,)\}$ est l'alphabet du calcul propositionnel sur $\mathscr{P}$: par exemple, pour $\mathscr{P} = \{p,q,r\}$:
  - $((r \vee p) \wedge q) \in \Sigma_{prop}^*$ et $p \vee q \wedge (\in \Sigma_{prop}^*$.
  - *Prop* le langage des formules propositionnelles.
    - $((r \vee p) \wedge q) \in$ *Prop*, $\vee p \wedge \notin$ *Prop*.
- Comment définir *Arith* et *Prop* :
  - récursivement/inductivement ! ! !

Au menu

Présentation du cours

Calcul propositionnel : première présentation

Retour sur quelques concepts de base de l'informatique

Récursivité et induction

Calcul propositionnel

L'induction

- **l'induction** est un outil formel élégant, simple et très utile en informatique :
  - qui permet de faire des définitions récursives ;
  - et qui permet une technique de preuve qui généralise la preuve par récurrence.

Trois exemples

- En JAVA : dans

```
class Liste {
  int contenu;
  Liste suivant;
  }
Liste lst;
```

on définit la classe `Liste` en utilisant dans la définition le champ "`suivant`" dont le type est la classe `Liste`.

- L'ensemble **des entiers pairs** est le plus petit [2] ensemble qui contient 0 et tel que si n est pair, alors $n+2$ est pair.

- L'ensemble *Arith* des **expressions arithmétiques** est le plus petit ensemble qui contient les entiers, et tel que si g et d sont des expressions arithmétiques, alors $g+d$, $g-d$, $g*d$, g/d et (g) sont des expressions arithmétiques.

2. "Plus petit"' : pour l'inclusion dans tout ce qui suit.

Plus précisément

Récursivité et induction

- Définitions inductives
- Preuves par induction
- Forme explicite
- Arbres de dérivation
- Fonctions définies inductivement

Définition inductives

- Une **définition inductive** d'une partie X d'un ensemble consiste à se donner :
  - la donnée explicite de certains éléments de X (**base**) ;
  - la donnée de règles de construction de nouveaux éléments de X à partir d'éléments déjà construits (**étapes inductives**).

Définition inductives

- Une **définition inductive** d'une partie X d'un ensemble consiste à se donner :
  - la donnée explicite de certains éléments de X (**base**) ;
  - la donnée de règles de construction de nouveaux éléments de X à partir d'éléments déjà construits (**étapes inductives**).

- Exemple. Une définition inductive des entiers pairs :

  (B) $0 \in P$;

  (I) $n \in P \Rightarrow n+2 \in P$.

Définition inductives

- Une **définition inductive** d'une partie X d'un ensemble consiste à se donner :
  - la donnée explicite de certains éléments de X (**base**) ;
  - la donnée de règles de construction de nouveaux éléments de X à partir d'éléments déjà construits (**étapes inductives**).

- Exemple. Une définition inductive des entiers pairs :
  (B) $0 \in P$;
  (I) $n \in P \Rightarrow n+2 \in P$.

- Exemple. L'ensemble $\mathcal{N}$ des nombres entiers non-nuls écrits en base 10 est la partie de ${\Sigma_{exp}}^*$, définie inductivement par
  (B) $a \in \mathcal{N}$ pour chaque $a \in \{1,2,\ldots,9\}$;
  (I) $g \in \mathcal{N} \Rightarrow ga \in \mathcal{N}$, pour chaque $a \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Théorème du point fixe

- Une **définition inductive** d'une partie X d'un ensemble E consiste à se donner :
  - un sous ensemble non vide B de E ;
  - et un ensemble de **règles** R : chaque règle $r_i \in R$ est une fonction (qui peut être partielle) r_i de $E^{n_i} \to E$ pour un certain entier n_i.

Théorème

A une définition inductive correspond un plus petit ensemble X qui vérifie les propriétés suivantes :

(B) il contient B : $B \subseteq X$;

(I) il est stable par les règles de R : pour chaque règle $r_i \in R$, pour tout $x_1, \cdots, x_{n_i} \in X$, on a $r_i(x_1, \cdots, x_{n_i}) \in X$.

- On dit que cet ensemble est alors **défini inductivement**.

Démonstration du théorème :

- On considère

$$X = \bigcap_{Y \in \mathscr{F}} Y, \tag{1}$$

où

$$\mathscr{F} = \{Y \subseteq E \mid Y \text{ satisfait } (B) \text{ et } (I)\}.$$

- X est l'ensemble recherché.

Noter une définition inductive

- On note souvent une définition inductive
  - aussi sous la forme de **règles de déduction :**

$$\frac{}{B \subseteq X} \qquad \frac{x_1 \in X \quad \ldots \quad x_{n_i} \in X}{r_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X}$$

- Exemples :
  - Définition inductive des entiers pairs précédente.
  - L'ensemble défini par

$$\frac{}{0 \in X} \qquad \frac{n \in X}{n+1 \in X}$$

n'est autre que $\mathbb{N}$ tout entier.

Plus précisément

Récursivité et induction

- Définitions inductives
- Preuves par induction
- Forme explicite
- Arbres de dérivation
- Fonctions définies inductivement

Preuves par induction

Théorème

Soit $X \subseteq E$ défini inductivement à partir de B et R, et soit $\mathscr{P}(x)$ un ***prédicat*** *exprimant une propriété de $x \in E$.*

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(*B*) *$\mathscr{P}(x)$ est vraie pour chaque $x \in B$;*

(*I*) *Pour chaque règle $r_i \in R$, pour chaque $x_1, \cdots, x_{n_i} \in E$, $\mathscr{P}(x_1), \cdots, \mathscr{P}(x_{n_i})$ vraies impliquent $\mathscr{P}(x)$ vraie en $x = r(x_1, \cdots, x_{n_i})$.*

Alors $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour chaque élément $x \in X$.

Démonstration du théorème :

- On considère l'ensemble Y des éléments $x \in E$ qui vérifient le prédicat $\mathscr{P}(x)$.
- Il contient B, il est stable par les règles de R, et donc il contient X.

Quelques applications

- Montrer que tout mot de *Arith* possède autant de parenthèses fermantes qu'ouvrantes.

- On considère le sous-ensemble ABS des arbres binaires stricts défini inductivement par :

  (B) $(\emptyset, a, \emptyset) \in ABS$, pour chaque $a \in A$.

  (I) $g, d \in ABS \Rightarrow (g, a, d) \in ABS$, pour chaque $a \in A$.

  - Montrer qu'un élément de ABS est toujours non-vide et sans sommet avec un seul fils non-vide.

Plus précisément

Récursivité et induction

- Définitions inductives
- Preuves par induction
- Forme explicite
- Arbres de dérivation
- Fonctions définies inductivement

Définition explicite d'un ensemble défini inductivement

Théorème

Chaque ensemble X défini inductivement à partir de l'ensemble de base B et des règles R s'écrit aussi

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la famille de parties de E définie par récurrence par

- $X_0 = B$
- $X_{n+1} = X_n \cup \{r_i(x_1, \cdots, x_{n_i}) | x_1, \cdots, x_{n_i} \in X_n \text{ et } r_i \in R\}$.

Autrement dit, tout élément de X est obtenu en partant d'éléments de B et en appliquant un nombre fini de fois les règles de R pour obtenir des nouveaux éléments.

Plus précisément

Récursivité et induction

- Définitions inductives
- Preuves par induction
- Forme explicite
- Arbres de dérivation
- Fonctions définies inductivement

Arbre de dérivations

- La caractérisation précédente **par le bas** de X invite à chercher à garder la trace de comment chaque élément est obtenu, en partant de X et en appliquant les règles de R.
  - Exemple, $1+2+3 \in \mathit{Arith}$ car

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \in \mathit{Arith}} \qquad \dfrac{}{2 \in \mathit{Arith}}}{1+2 \in \mathit{Arith}} \qquad \dfrac{}{3 \in \mathit{Arith}}}{1+2+3 \in \mathit{Arith}}$$

- On dit qu'une définition inductive de X est **non ambiguë** s'il n'existe qu'une unique façon de construire chaque élément de X.

Exemples

- La définition suivante de $\mathbb{N}^2$ est ambiguë.

  (B) $(0,0) \in \mathbb{N}^2$;
  (I) $(n,m) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow (n+1,m) \in \mathbb{N}^2$;
  (I) $(n,m) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow (n,m+1) \in \mathbb{N}^2$.

- La définition précédente de *Arith* est ambiguë : Le mot $1+2+3$ correspond à la dérivation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \in \mathit{Arith}} \quad \dfrac{}{2 \in \mathit{Arith}}}{1+2 \in \mathit{Arith}} \quad \dfrac{}{3 \in \mathit{Arith}}}{1+2+3 \in \mathit{Arith}}$$

  Ce n'est pas la seule possible. En effet, on peut aussi écrire

$$\dfrac{\dfrac{}{1 \in \mathit{Arith}} \quad \dfrac{\dfrac{}{2 \in \mathit{Arith}} \quad \dfrac{}{3 \in \mathit{Arith}}}{2+3 \in \mathit{Arith}}}{1+2+3 \in \mathit{Arith}}$$

Plus précisément

Récursivité et induction

- Définitions inductives
- Preuves par induction
- Forme explicite
- Arbres de dérivation
- Fonctions définies inductivement

Fonctions définies inductivement

Théorème

Soit $X \subseteq E$ un ensemble défini à partir de B et R de façon non-ambiguë. Soit Y un ensemble.

Pour qu'une application f de X dans Y soit parfaitement définie, il suffit de se donner :

(B) *la valeur de $f(x)$ pour chacun des éléments $x \in B$;*

(I) *pour chaque règle $r_i \in R$, la valeur de $f(x)$ pour $x = r_i(x_1, \cdots, x_{n_i})$ en fonction de la valeur de x_1, ..., x_{n_i}, $f(x_1)$, ..., et $f(x_{n_i})$.*

Exemples

- Exemple : La fonction factorielle $Fact$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ se définit inductivement par :

  (B) $Fact(0) = 1$;
  (I) $Fact(n+1) = (n+1) * Fact(n)$.

- Exemple : La valeur h d'un mot de $\mathscr{N}$ se définit par :

  (B) $h(a) = a$ pour $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
  (I) $h(ga) = 10 * h(g) + a$.

- Les fonctions primitive récursives :
  - voir PC demain.

Au menu

Présentation du cours

Calcul propositionnel : première présentation

Retour sur quelques concepts de base de l'informatique

Récursivité et induction

Calcul propositionnel

Plus précisément

Calcul propositionnel
- Syntaxe
- Sémantique
- Quelques équivalences

Syntaxe

Soit $\mathscr{P}$ un ensemble de variables.

Définition (Formules propositionnelles)

L'ensemble des formules propositionnelles $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{P}$ est le langage sur l'alphabet $\mathscr{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,)\}$ défini inductivement par les règles suivantes :

- (B) *il contient $\mathscr{P}$: toute variable propositionnelle est une formule propositionnelle ;*
- (I) *si $F \in \mathscr{F}$ alors $\neg F \in \mathscr{F}$;*
- (I) *si $F, G \in \mathscr{F}$ alors $(F \wedge G) \in \mathscr{F}$, $(F \vee G) \in \mathscr{F}$, $(F \Rightarrow G) \in \mathscr{F}$, et $(F \Leftrightarrow G) \in \mathscr{F}$.*

Décomposition/Lecture unique

La définition inductive est non ambiguë :

Proposition (Décomposition / Lecture unique)

Soit F une formule propositionnelle. Alors F est d'une, et exactement d'une, des formes suivantes

1. *une variable propositionnelle $p \in \mathscr{P}$;*
2. *$\neg G$, où G est une formule propositionnelle ;*
3. *$(G \wedge H)$ où G et H sont des formules propositionnelles ;*
4. *$(G \vee H)$ où G et H sont des formules propositionnelles ;*
5. *$(G \Rightarrow H)$ où G et H sont des formules propositionnelles ;*
6. *$(G \Leftrightarrow H)$ où G et H sont des formules propositionnelles.*

De plus dans les cas 2., 3., 4., 5. et 6., il y a unicité de la formule G et de la formule H avec cette propriété.

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Syntaxe
- Sémantique
- Quelques équivalences

Valeur de vérité d'une formule

Une **valuation** est une une fonction de $\mathscr{P}$ vers $\{0,1\}$;

Proposition

Soit v une valuation.
Par le théorème précédent (fonction définie inductivement), il existe une unique fonction définie sur tout $\mathscr{F}$ qui vérifie les conditions suivantes

- (B) *chaque variable propositionnelle p s'interprète par $v(p)$;*
- (I) *la négation s'interprète par la négation logique ;*
- (I) $\wedge$ *s'interprète comme le et logique ;*
- (I) $\vee$ *s'interprète comme le ou logique ;*
- (I) $\Rightarrow$ *s'interprète comme l'implication logique ;*
- (I) $\Leftrightarrow$ *s'interprète comme l'équivalence logique.*

Lorsque F s'évalue en 1, on dit que F est **satisfaite** en v, et que v est un **modèle** de F.

Plus précisément

Calcul propositionnel

- Syntaxe
- Sémantique
- Quelques équivalences

Tautologies, formules équivalentes

- Une **tautologie** est une formule F qui est satisfaite en toute valuation.
- Deux formules F et G sont dites **équivalentes** si elles s'évaluent en 1 (et donc aussi en 0) pour exactement les mêmes valuations.
  - On écrit dans ce cas $F \equiv G$.
- Exemples :
  - La formule $p \vee \neg p$ est une tautologie ;
  - Les formules p et $\neg\neg p$ sont équivalentes.

Quelques équivalences

- Pour toutes formules F et G, les formules suivantes sont des tautologies :

$$(F \Rightarrow F),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow F)),$$

$$(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))).$$

- Idempotence : pour toute formule F

$$(F \vee F) \equiv F,$$

$$(F \wedge F) \equiv F.$$

- Associativité : pour toutes formules F, G, H

$$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H),$$

$$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H).$$

Quelques équivalences

- Commutativité : pour toutes formules F et G

$$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F),$$

$$(F \vee G) \equiv (G \vee F).$$

- Distributivité : pour toutes formules F, G, H

$$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)),$$

$$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)).$$

- Lois de De Morgan : pour toutes formules F et G

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G),$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G).$$

- Absorption : pour toutes formules F et G

$$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$$

$$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F.$$

La suite . . .

- Demain :
  - Appréhender ce que l'on arrive à définir par induction sur les entiers.
- La semaine prochaine :
  - Calcul propositionnel, Logique du premier ordre.
  - Preuve. Validité. Complétude.

Exprimez vous.

Page du cours.

Commentaires, avis
sur les cours et les PCs.

- Page du cours:
  https://moodle.polytechnique.fr/course/view.php?id=19276.
- Commentaires, avis sur les cours et les PCs.
  www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/AVIS.

ANNEXES

ANNEXE

Annexes : Quelques concepts de base de l'informatique

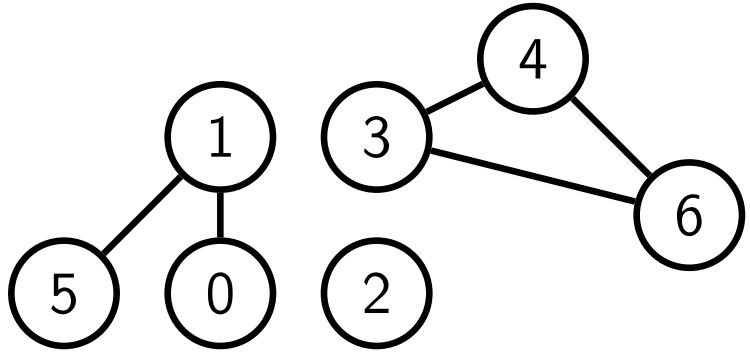
- Graphes
- Arbres

Un graphe

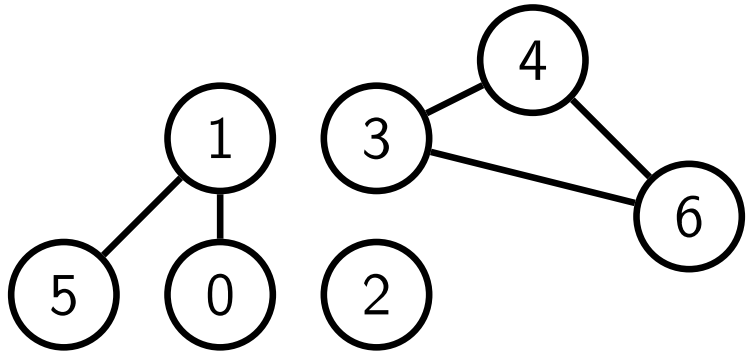
- Un **graphe** (non orienté) est donné par un couple $G = (V, E)$, où :
  - V est un ensemble ;
  - E est un ensemble de paires $\{u, v\}$ avec $u, v \in V$.

- On convient de représenter une paire $\{u, v\}$ par (u, v) ou (v, u). Autrement dit, (u, v) et (v, u) dénotent la même arête.

- Exemple :
  - $V = \{0, 1, \ldots, 6\}$
  - $E = \{(0,1), (3,4), (5,1), (6,3), (6,4)\}$.

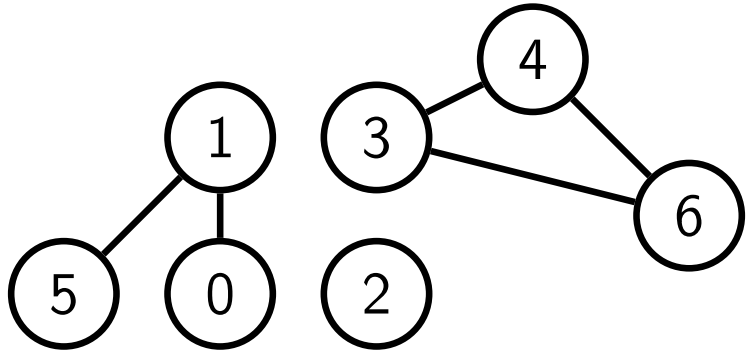


Vocabulaire



- Les éléments e de E sont appelés des **arêtes**. Si $e = (u, v)$, u et v sont appelés les **extrémités** de e.
- u et v sont dits **voisins** s'il y a une arête entre u et v.
- Le degré de u est le nombre de voisins de u.

Vocabulaire



- Un **chemin du sommet** s **vers le sommet** t est une suite $e_0, e_1, \cdots, e_n$ de sommets telle que $e_0 = s$, $e_n = t$, $(e_{i-1}, e_i) \in E$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
  - n est appelé la **longueur** du chemin, et on dit que t **est joignable** à partir de s.
  - Le chemin est dit **simple** si les e_i sont distincts deux-à-deux.
  - Un **cycle** est un chemin de longueur non-nulle avec $e_0 = e_n$.
- Le sommet s est dit **à distance** n de t s'il existe un chemin de longueur n entre s et t, mais aucun chemin de longueur inférieure.

Les graphes sont partout !

- Beaucoup de problèmes se modélisent par des objets et des relations entre objets.
- Exemples :
  - Le graphe routier.
  - Les réseaux informatiques.
  - Le graphe du web.
- Beaucoup de problèmes se ramènent à des problèmes sur les graphes.
- Les graphes sont omniprésents en informatique.
- Théorie des graphes :
  - Euler, Hamilton, Kirchhoff, König, Edmonds, Berge, Lovász, Seymour,...

ANNEXE

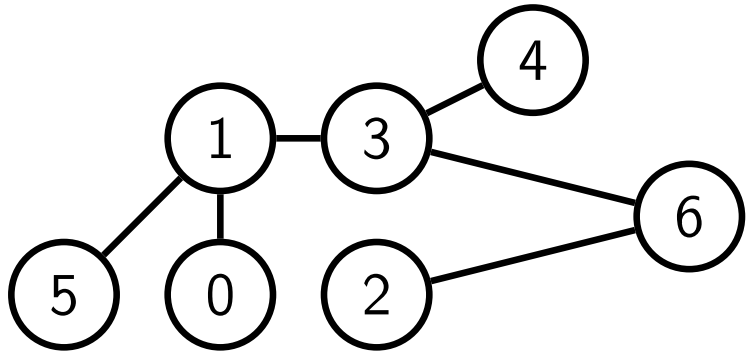
Annexes : Quelques concepts de base de l'informatique

- Graphes
- Arbres

Les arbres

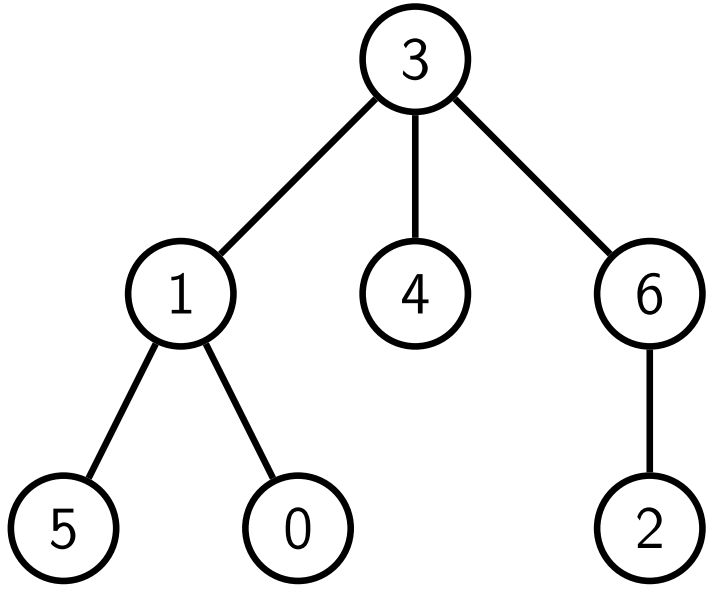
- Un graphe **connexe** est un graphe tels que les sommets sont joignables deux à deux.

- Un graphe connexe sans cycle est appelé un **arbre** (libre).
- Un graphe sans-cycle est appelé une **forêt**.

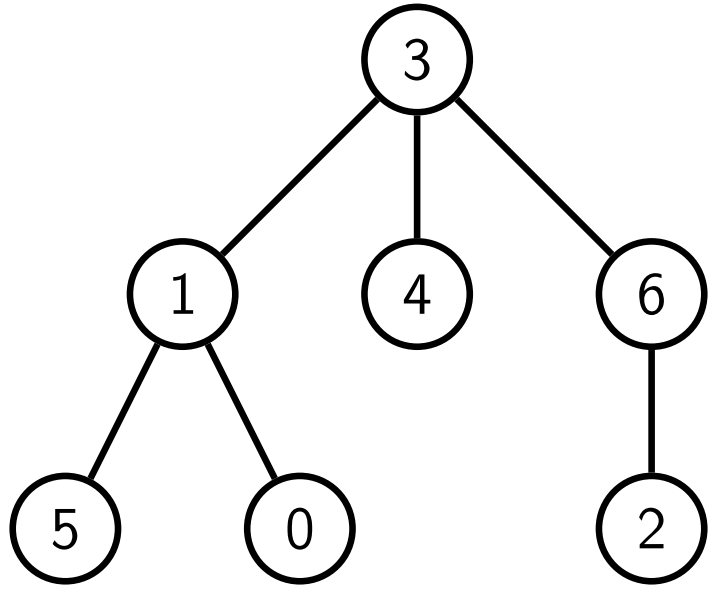


Les arbres poussent de haut en bas en informatique

- On distingue souvent un sommet que l'on appelle **sa racine**.
- On dessine un arbre
  - en plaçant la racine r tout en haut ;
  - puis en plaçant les sommets à distance i de r à la ligne i.
- Exemple : pour l'arbre libre précédent, en prenant le sommet d'étiquette 3 comme racine.

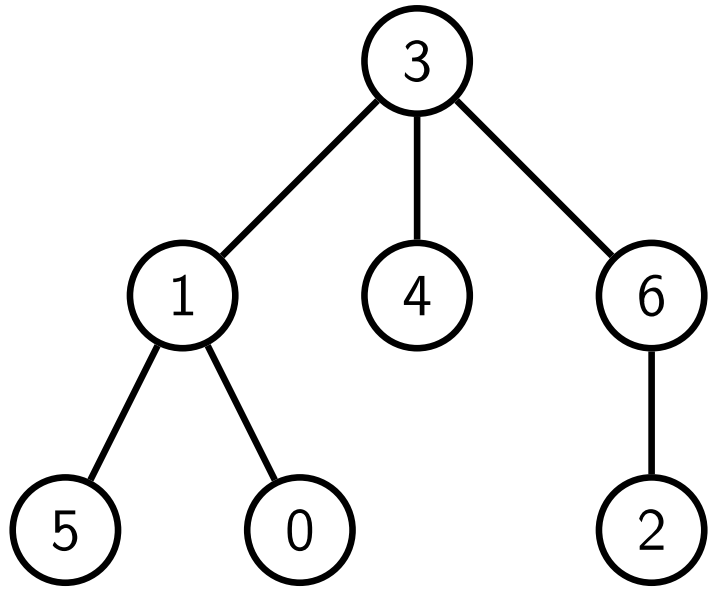


Encore du vocabulaire



- Pour tout sommet u, il existe un unique chemin (simple) entre la racine r et u.
- Tout sommet a sur ce chemin est appelé **un ancêtre** de u. u est dit un **descendant** de a.
- L'avant dernier sommet p sur ce chemin est appelé **le père** de u. u est appelé **un fils** de p.
- Le **sous-arbre** de racine u est l'arbre induit par les descendants de u.

Encore du vocabulaire



- **L'arité** d'un sommet est le nombre de ses fils.
- Un sommet qui n'a pas de fils est appelé **une feuille**.
- La **hauteur d'un sommet** est sa distance à la racine r.
- La **hauteur d'un arbre** est la hauteur de la feuille la plus haute.