École Polytechnique

INF411

Les bases de la programmation et de l'algorithmique

Jean-Christophe Filliâtre

Bloc 6 / lundi 2 octobre 2017

quels sont les dix mots les plus fréquents dans
Le tour du monde en quatre-vingts jours ?

on peut le faire avec le *shell*, en une ligne !

```
cat file | tr -cs '[:alpha:]' '[\n*]' | sort | uniq -c | sort -rn
```

```
   2826 de
   1616 le
   1587 la
   1472 et
   1112 il
    952 les
    832 un
    788 en
    766 du
    670 Fogg
    ...
```

on envoie le fichier sur la sortie standard

```
cat ltdme80j.txt
```

on remplace les caractères non-alphabétiques par un retour-chariot

```
| tr -cs '[:alpha:]' '[\n*]'
```

on trie les lignes par ordre alphabétique

```
| sort
```

on regroupe les lignes identiques, en les comptant (`-c`)

```
| uniq -c
```

on trie numériquement (`-n`), en ordre inverse (`-r`)

```
| sort -rn
```

on a utilisé ici deux tris

- un tri par ordre alphabétique (de 76 420 lignes)
- un tri numérique (de 8 608 lignes)

l'objet de l'amphi d'aujourd'hui est justement **le tri**

mélanger

comment mélanger N valeurs correctement ?

par exemple les N éléments d'un tableau chaque élément i est échangé avec un élément $j \in [0, i]$

```
static<E> void shuffle(E[] a) {
  for (int i = 1; i < a.length; i++) {
    int j = (int)(Math.random() * (i + 1)); // j dans 0..i
    swap(a, i, j);
  }
}
```

0	**1**	2	3	4	5	j = 0
1	0	**2**	3	4	5	j = 2
1	0	2	**3**	4	5	j = 1
1	3	2	0	**4**	5	j = 4
1	3	2	0	4	**5**	j = 3
1	3	2	5	4	0	

```java
for (int i = 1; i < a.length; i++) {
  int j = (int)(Math.random() * (i + 1)); // j dans 0..i
  swap(a, i, j);
}
```

avant	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}
après	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_{n-1}

montrons que la probabilité que $y_k = x_l$ après l'étape i vaut

$$P_i(y_k = x_l) = \frac{1}{i+1}$$

pour $0 \leq k, l \leq i$

par récurrence sur i

- clair pour $i = 0$
- supposons le résultat pour $i - 1$

avant	x_0	x_1	$\dots$	x_{i-1}	x_i
après	y_0	y_1	$\dots$	y_{i-1}	y_i

pour $k = i$

$$P_i(y_i = x_i) = \frac{1}{i+1} \quad \text{(pas d'échange)}$$

$$\begin{aligned} l < i, \quad P_i(y_i = x_l) &= \sum_{0 \le j < i} \frac{1}{i+1} P_{i-1}(y_j = x_l) \\ &= \sum_{0 \le j < i} \frac{1}{i+1} \times \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

par récurrence sur i

- clair pour $i = 0$
- supposons le résultat pour $i - 1$

avant	x_0	x_1	$\dots$	x_{i-1}	x_i
après	y_0	y_1	$\dots$	y_{i-1}	y_i

pour $k < i$

$$\begin{array}{rrcl} & P_i(y_k = x_i) & = & \dfrac{1}{i+1} \quad \text{(échange)} \\ l < i, & P_i(y_k = x_l) & = & \dfrac{i}{i+1} \times P_{i-1}(y_k = x_l) \\ & & = & \dfrac{i}{i+1} \times \dfrac{1}{i} \\ & & = & \dfrac{1}{i+1} \end{array}$$

$\square$

- est facile à écrire
- de complexité $O(N)$
- donne chacune des $N!$ permutations avec la même probabilité

complexité du problème du tri

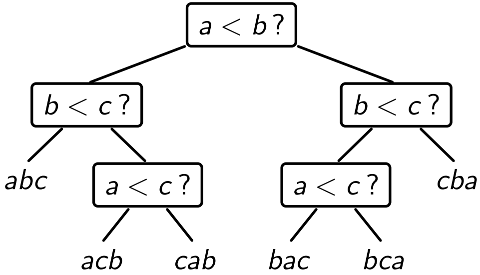
à quelle vitesse peut-on espérer trier ?

dit autrement : quelle est la meilleure complexité dans le pire des cas ?

on suppose que l'algorithme

- ne procède que par **comparaisons** entre éléments
- ne possède aucune information quant à la distribution

le coût sera justement le nombre de comparaisons effectuées on peut trier trois valeurs a, b, c ainsi

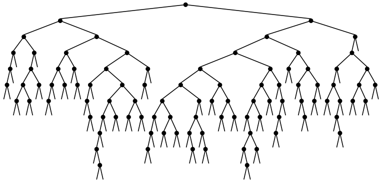


(un tel arbre, appelé *questionnaire*, représente l'algorithme) ici, on fait 2 ou 3 comparaisons selon l'entrée

donc **3 comparaisons** dans le pire des cas

on se persuade facilement que c'est optimal pour $N = 3$:
on ne peut trier trois valeurs avec au plus deux comparaisons

un algorithme qui trie N valeurs peut être vu comme un arbre binaire où chaque nœud est un test et chaque feuille une permutation



- il y a **au moins** $N!$ feuilles
- la complexité dans le pire des cas est la **hauteur** de cet arbre

$$N! \leq \text{nombre de feuilles} \leq 2^{\text{hauteur}}$$

donc

$$\text{hauteur} \geq \log_2(N!) = \sum_{1 \leq i \leq N} \log_2(i) \sim N \log_2(N)$$

aucun algorithme, procédant par comparaisons uniquement,
ne peut trier N valeurs en effectuant toujours moins que

$$N \log N$$

comparaisons

le **tri par tas**, vu la semaine dernière, est optimal bien entendu, on peut faire mieux quand on possède une information supplémentaire sur les éléments

exemple : si les N éléments ne prennent que **deux valeurs** distinctes, alors on peut trier en $O(N)$

(cf exercices 86, 87 et 88 du poly)

tri par insertion

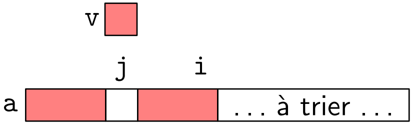
tri par insertion

le plus naturel : on insère successivement chaque nouvel élément parmi les éléments déjà triés

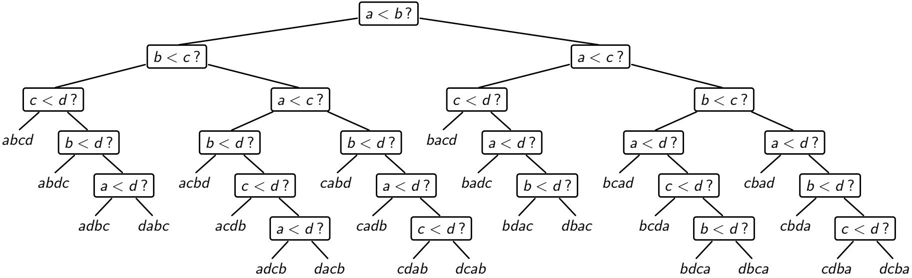
0 `i-1`	`i`	
. . . déjà trié . . .	`v`	. . . à trier . . .

code

```java
static void insertionSort(int[] a) {
  for (int i = 1; i < a.length; i++) {
    int v = a[i], j = i;
    // on décale les éléments vers la droite
    for (; 0 < j && v < a[j-1]; j--) a[j] = a[j-1];
    // jusqu'à avoir trouvé la place j de v
    a[j] = v;
  }
}
```



a	b	c	d



(hauteur $6 > \lceil \log_2(24) \rceil$)

dans le **pire** des cas, l'insertion de `a[i]` demande `i` comparaisons (tableau trié en ordre inverse), d'où un total

$$1 + 2 + \cdots + N - 1 \sim \frac{N^2}{2}$$

dans le **meilleur** des cas, l'insertion de `a[i]` demande une seule comparaison (le tableau est déjà trié), d'où un total

$$N$$

	meilleur cas	moyenne	pire cas
comparaisons	N	$N^2/4$	$N^2/2$
affectations	N	$N^2/4$	$N^2/2$

+ linéaire sur un tableau déjà trié
− quadratique dans le pire des cas

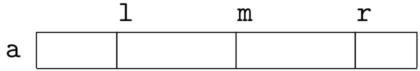
$N = 10^5 \Rightarrow$ plusieurs milliards d'opérations

tri fusion

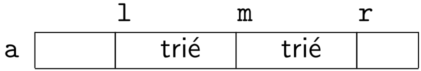
1. couper le tableau en deux moitiés égales
2. les trier récursivement
3. fusionner les résultats

il faut généraliser au tri de `a[l..r[`

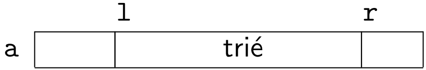
1. couper le tableau en deux moitiés égales $\mathtt{m} = \lfloor \frac{\mathtt{l}+\mathtt{r}}{2} \rfloor$

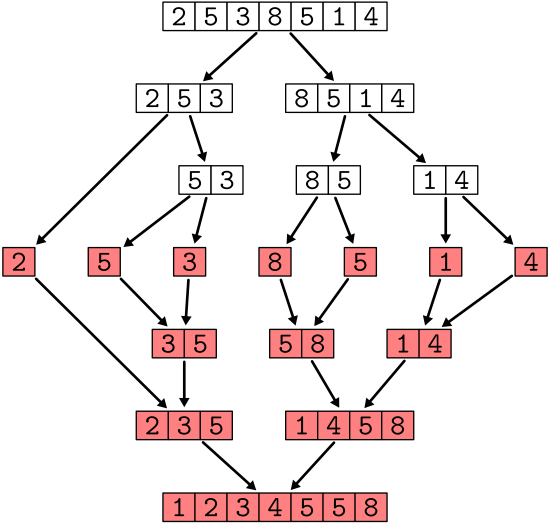


2. trier récursivement `a[l..m[` et `a[m..r[`



3. fusionner les résultats




2 5 3 8 5 1 4
2 5 3
8 5 1 4
5 3
8 5
1 4
2
5
3
8
5
1
4
3 5
5 8
1 4
2 3 5
1 4 5 8
1 2 3 4 5 5 8

il est extrêmement difficile de réaliser la fusion **en place**

on va utiliser un second tableau

```
static void mergesort(int[] a) {
  mergesortrec(a, new int[a.length], 0, a.length);
}
```

trier `a[l..r[` en utilisant le tableau auxiliaire `tmp`

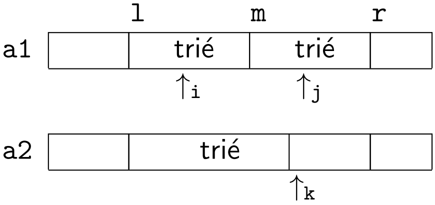
```
static void mergesortrec(int[] a, int[] tmp, int l, int r){
  if (l >= r-1) return; // au plus un élément
  int m = l + (r - l) / 2;
  mergesortrec(a, tmp, l, m);
  mergesortrec(a, tmp, m, r);
  for (int i = l; i < r; i++) tmp[i] = a[i];
  merge(tmp, a, l, m, r);
}
```

(note : `(l + r) / 2` pourrait provoquer un débordement arithmétique)

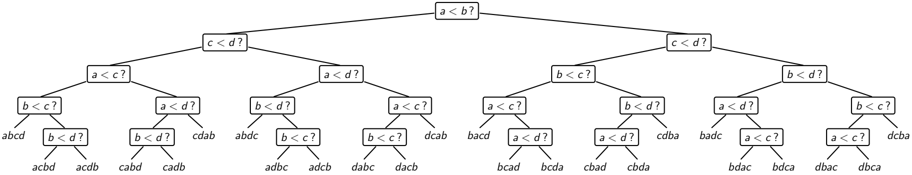
fusion

fusionne `a1[l..m[` et `a1[m..r[` dans `a2[l..r[`

```
static void merge(int[] a1, int[] a2, int l, int m, int r){
  int i = l, j = m;
  for (int k = l; k < r; k++)
    if (i < m && (j == r || a1[i] <= a1[j]))
      a2[k] = a1[i++];
    else
      a2[k] = a1[j++];
}
```



a	b	c	d



(hauteur $5 = \lceil \log_2(24) \rceil$)

soit C_N le nombre de comparaisons pour trier N éléments

on a

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 0 \\ C_N = C_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{N}{2} \rceil} + f_N \end{cases}$$

où f_N est le coût de la fusion

supposons le pire des cas ($f_N = N$) et $N = 2^n$ pour simplifier les calculs

il vient

$$\begin{aligned}
C_{2^n} &= C_{2^{n-1}} + C_{2^{n-1}} + 2^n \\
\frac{C_{2^n}}{2^n} &= \frac{C_{2^{n-1}}}{2^{n-1}} + 1 \\
&= \frac{C_{2^{n-2}}}{2^{n-2}} + 1 + 1 \\
&= n
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_N = N \log_2(N)$$

	meilleur cas	moyenne	pire cas
comparaisons	$\frac{1}{2}N \log N$	$N \log N$	$N \log N$
affectations	$2N \log N$	$2N \log N$	$2N \log N$

+ complexité optimale
− espace supplémentaire $O(N)$

+ s'applique facilement aux listes, **en place** (cf TD de cette semaine) les appels récursifs imbriqués occupent de l'espace sur la pile (cf amphi 1)

mais cet espace est en $O(\log N)$,
car $|\texttt{r} - \texttt{l}|$ est divisé par deux à chaque fois

donc on ne provoquera pas `StackOverflowError`

- quand `r` $-$ `l` devient très petit, faire un tri par insertion
- pas besoin de fusionner si `a[m-1]` $\leq$ `a[m]`
  (devient alors linéaire sur un tableau déjà trié)
- pour éviter la copie dans `tmp`,
  échanger le rôle des deux tableaux à chaque fois
  (cf exercice 83 du poly)

on a procédé de haut en bas (*top-down mergesort*)

on peut aussi procéder **de bas en haut** (*bottom-up mergesort*)

- soit en partant de segments de taille 1
- soit en partant de segments déjà triés (*natural mergesort*)

tri rapide

comment éviter l'espace auxiliaire

tout en conservant le principe *diviser pour régner* ?

on conserve l'idée de trier `a[l..r[`

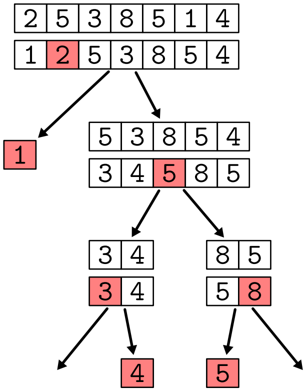
1. **réarranger** les éléments pour avoir

		l	m	r
a		$<$ p	$\geq$ p	

   pour une certaine valeur `p` appelée **pivot**

2. **trier récursivement** `a[l..m[` et `a[m..r[`

		l	m	r
a		trié	trié	


2 5 3 8 5 1 4
1 2 5 3 8 5 4
1
5 3 8 5 4
3 4 5 8 5
3 4
3 4
8 5
5 8
4
5

```
static void quicksort(int[] a) {
  quickrec(a, 0, a.length);
}
```

```
static void quickrec(int[] a, int l, int r) {
  if (l >= r-1) return; // au plus un élément
  int m = partition(a, l, r);
  quickrec(a, l,     m);
  quickrec(a, m + 1, r);
}
```

l	m	r
$< p$	p	$\geq p$

il ne reste plus qu'à écrire `partition` on choisit arbitrairement `a[l]` comme pivot

l		m	i r
p	$< p$	$\geq p$	?

```
static int partition(int[] a, int l, int r) {
  int p = a[l], m = l;
  for (int i = l + 1; i < r; i++)
    if (a[i] < p)
      swap(a, i, ++m);
  swap(a, l, m);
  return m;
}
```

l	m	r
$< p$	p	$\geq p$

soit C_N le nombre de comparaisons pour trier N éléments

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 0 \\ C_N = \underbrace{N-1}_{\texttt{partition}} + \underbrace{C_K}_{\text{à gauche}} + \underbrace{C_{N-1-K}}_{\text{à droite}} \end{cases}$$

pour un tableau déjà trié, $K = 0$

$$C_N = N - 1 + C_{N-1} \sim \frac{N^2}{2}$$

en moyenne, cependant, c'est optimal (preuve dans le poly)

	meilleur cas		moyenne	pire cas
comparaisons	$N \log N$		$2N \log N$	$N^2/2$
affectations		0	$2N \log N$	N^2

meilleur cas comparaisons = pivot au milieu
meilleur cas affectations = pivot à gauche = pire cas comparaisons

+ en place
− pire cas $O(N^2)$

le pire cas correspond à un pivot au bord

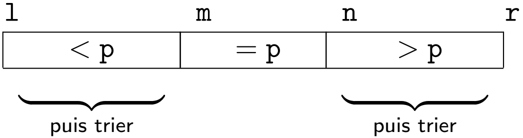
idée : prendre comme pivot un élément de `a[l..r[` au hasard

encore plus simple : **mélanger avant de trier** !

```
static void quicksort(int[] a) {
  KnuthShuffle.shuffle(a);
  quickrec(a, 0, a.length);
}
```

ne suffit cependant pas si beaucoup d'éléments égaux
(tous les éléments égaux $\Rightarrow$ pivot forcément au bord)

solution : **partitionner en trois** (*3-way partition*)



(cf exercices 80 et 87 dans le poly)

comme pour le tri fusion,
les appels récursifs imbriqués occupent de l'espace sur la pile

mais ici cet espace peut être en $O(N)$
(on ne découpe plus systématiquement en deux moitiés égales)

provoque alors `StackOverflowError` !

on peut

- faire un appel récursif sur la plus petite des deux moitiés
- remplacer l'autre appel récursif par une boucle `while`

on retrouve alors une taille de pile en $O(\log N)$

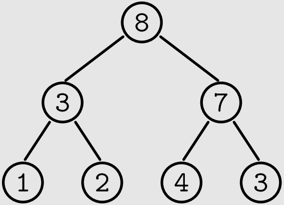
(cf exercice 81 du poly)

- quand `r` − `l` devient très petit, faire un tri par insertion

tri par tas

```
static void moveDown(int[] a, int i, int x, int n) {
  while (true) {
    int j = 2 * i + 1;
    if (j >= n) break;
    if (j + 1 < n && a[j] < a[j + 1]) j++;
    if (a[j] <= x) break;
    a[i] = a[j]; i = j;
  }
  a[i] = x;
}
static void heapsort(int[] a) {
  int n = a.length;
  for (int k = n / 2 - 1; k >= 0; k--)
    moveDown(a, k, a[k], n);
  for (int k = n - 1; k >= 1; k--) {
    int v = a[k]; a[k] = a[0];
    moveDown(a, 0, v, k);
  }
}
```

a	8	3	7	1	2	4	3



le tri par tas est en $O(N \log N)$ dans le pire des cas (cf amphi 5)

et en place

pourquoi tous ces tris ?

ils ont chacun des avantages et des inconvénients

- en place ou non
- efficace sur un tableau (presque) déjà trié
- optimal dans le pire des cas
- stable

Définition

Un tri est **stable** s'il préserve l'ordre d'apparition des éléments égaux.

non significatif pour des éléments de type `int`

mais de manière générale on trie des objets d'un type `E` quelconque

```
class Sort<E extends Comparable<E>> { ... }
```

```
static<E extends Comparable<E>> void sort(E[] a) { ... }
```

un ensemble de films est donné par ordre chronologique

on trie selon la note moyenne des commentaires, avec un tri stable

résultat : à note égale, les films restent triés par ordre chronologique

(c'est une façon d'obtenir un ordre lexicographique)

	moyenne	pire cas	déjà trié	en place	stable
insertion	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N)$	oui	oui
fusion	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	$O(N)$	non	oui
rapide	$O(N \log N)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$	oui	non
par tas	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	$O(N \log N)$	oui	non

et les constantes cachées dans les O peuvent faire une différence fournit un grand nombre de méthodes `Arrays.sort(...)`

- tri **rapide** pour les types primitifs

```
void sort(  char[] a);
void sort(   int[] a);
void sort(double[] a);
                 ...
```

- tri **fusion** pour les objets

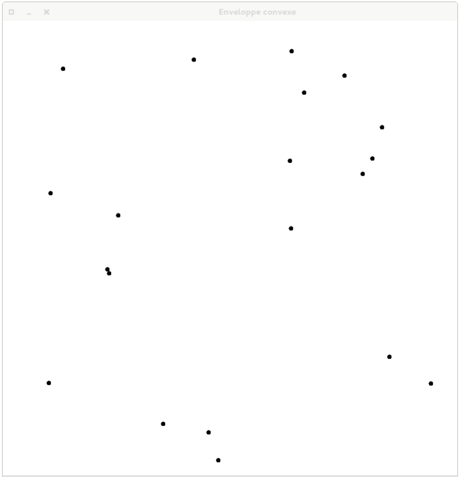
```
void sort(T[] a); // si T implémente Comparable<T>
void sort(T[] a, Comparator<T> c);
```

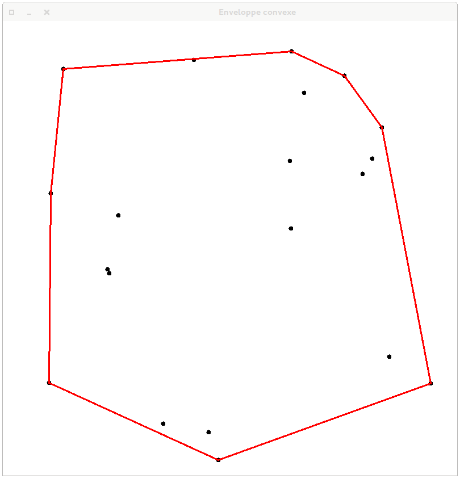
la documentation garantit un tri stable

le tri ne sert pas qu'à organiser des données

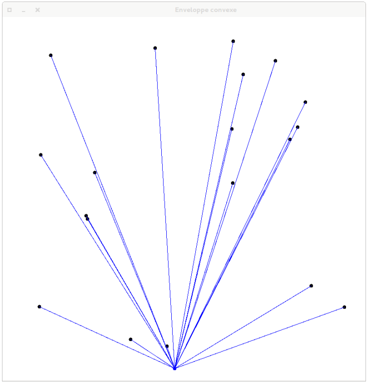
c'est aussi un ingrédient de base de nombreux algorithmes

entrée = N points dans le plan
sortie = points formant l'enveloppe convexe





1. déterminer le point p le plus bas
2. **trier** tous les points selon l'angle fait avec p



3. considérer les points dans cet ordre,
   en les ajoutant/retirant de l'enveloppe convexe

démo

l'étape 1 est clairement en $O(N)$

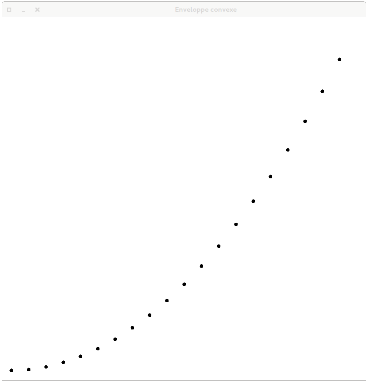
l'étape 2 est en $O(N \log N)$ (tri de N valeurs)

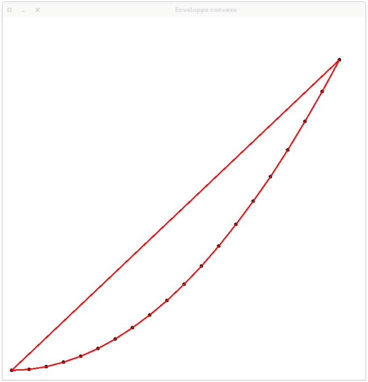
l'étape 3 est $O(N)$, car chaque point est ajouté une fois dans l'enveloppe, retiré au plus une fois de l'enveloppe

c'est donc une solution en $O(N \log N)$

on ne peut pas faire mieux

en effet, soient N entiers $x_1, \ldots, x_N$
trouver l'enveloppe convexe des N points (x_i, x_i^2) revient à les trier





et on a vu que le tri ne peut être fait en moins de $N \log N$

quand on programme, il faut faire des petits dessins !

l	m	i	r
p	$<$ p	$\geq$ p	?

le tri fusion de listes, en place

application : une autre façon de trouver les mots les plus fréquents

$$\text{Le} \rightarrow \text{tour} \rightarrow \text{du} \rightarrow \text{monde} \rightarrow \cdots$$

$$\text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \text{à} \rightarrow \cdots$$

$$\text{à}(1678) \rightarrow \text{ah}(4) \rightarrow \text{bien}(13) \rightarrow \cdots$$

$$\text{de}(2826) \rightarrow \text{à}(1678) \rightarrow \text{le}(1616) \rightarrow \text{la}(1499) \rightarrow \cdots$$

- **lire le poly**, chapitre 13. Tri

  il y a des **exercices** dans le poly
  suggestions : ex 84 p 157, ex 87 p 161

- **bloc 7** : graphes (1/2)

amphi mercredi et TD jeudi