École Polytechnique

CSC_41011

Les bases de la programmation et de l'algorithmique

Jean-Christophe Filliâtre

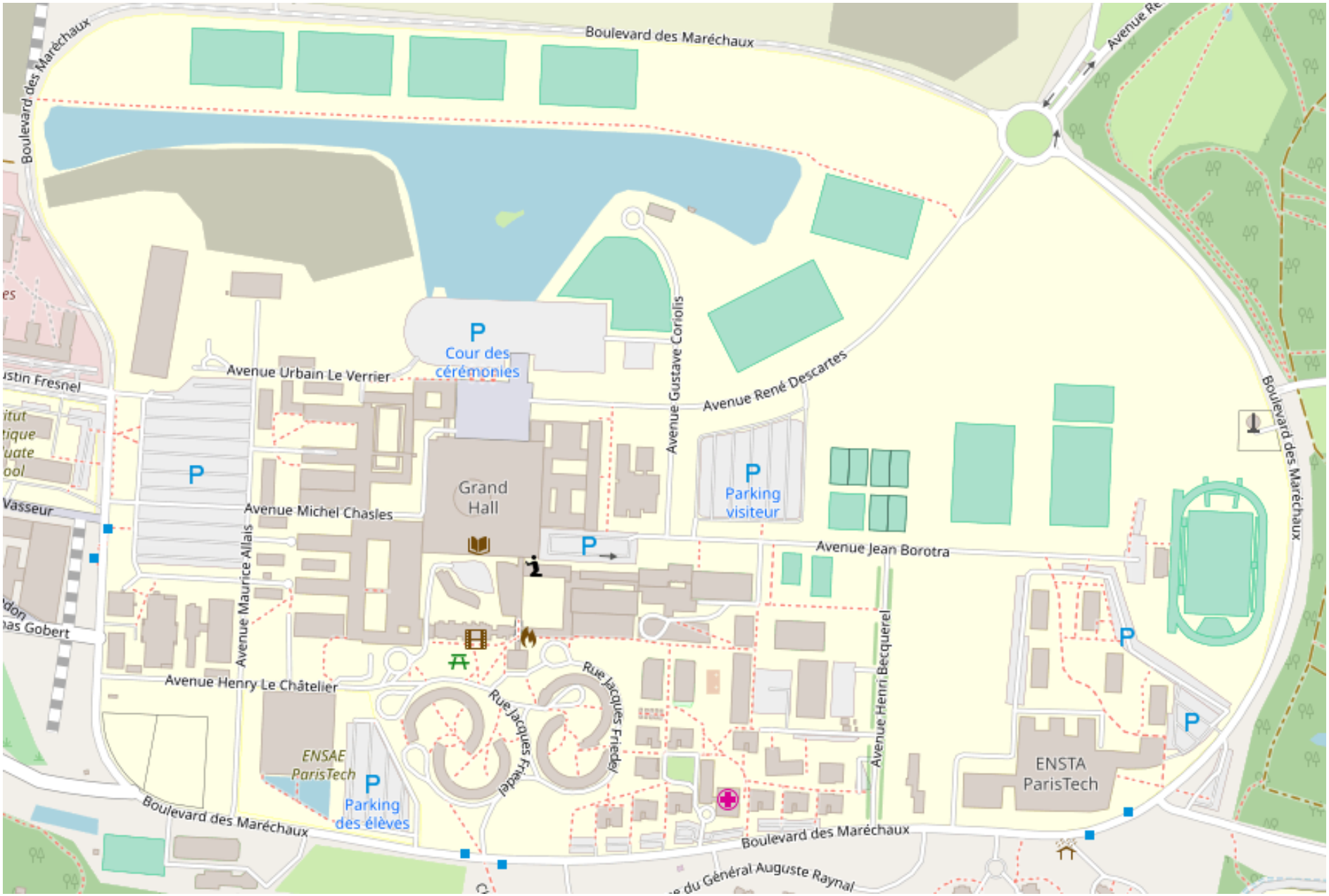
graphes (2/2)

une carte routière est un exemple de graphe

aujourd'hui, on va programmer un (embryon de) navigateur GPS

cartographie libre : www.openstreetmap.org

cartographie libre : www.openstreetmap.org



les données cartographiques sont au format XML

elles décrivent des sommets, comme

```
<node id="243494495" lat="48.9319569" lon="2.1654713">
</node>
```

ou encore

```
<node id="80953646" lat="48.8582320" lon="2.2945504">
  <tag k="name" v="Tour Eiffel"></tag>
  <tag k="tourism" v="attraction"></tag>
</node>
```

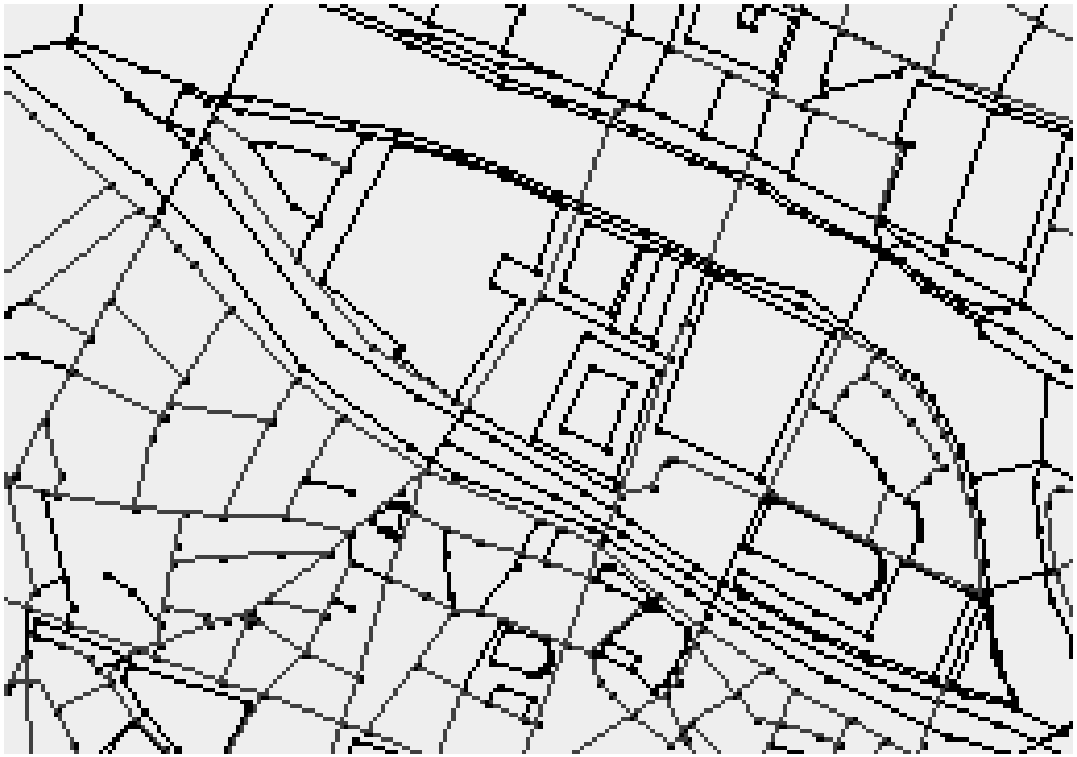
chaque sommet est identifié par un numéro unique (attribut `id`)

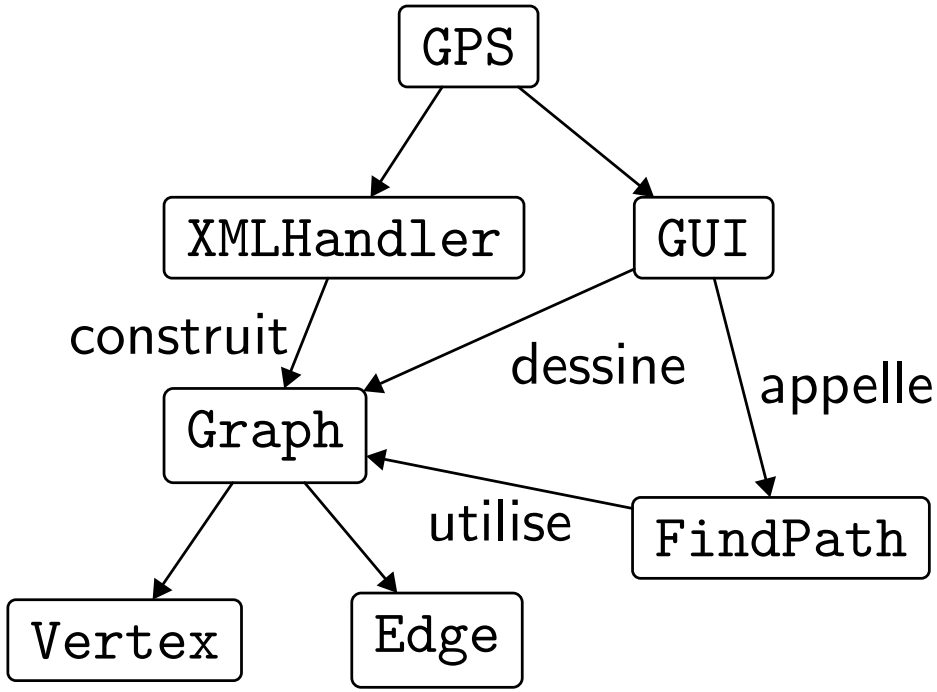
et des chemins

```
<way id="22815079">
  <nd ref="243494495"></nd>
  <nd ref="245446883"></nd>
  <nd ref="245447534"></nd>
  <nd ref="245446753"></nd>
  <nd ref="245446884"></nd>
  <tag k="highway" v="residential"></tag>
  <tag k="name" v="rue de la Paix"></tag>
</way>
```

ici 4 arcs reliant 5 sommets identifiés par leur numéro (attribut `ref`)

c'est un graphe (orienté)




GPS
XMLHandler
GUI
construit
dessine
appelle
Graph
utilise
FindPath
Vertex
Edge

construction du graphe

```
class Vertex {
  final int id;
  final double lat, lon;
  ...
}
```

```
class Edge {
  final Vertex src, dst;
  final String name;
  ...
}
```

```
class Graph {
  private static HashMap<Vertex, LinkedList<Edge>> adj;
  ...
}
```

lecture du fichier XML

on utilise la bibliothèque Java `org.xml.sax`

le principe est de fournir des méthodes à appeler sur chaque

- balise ouvrante (`<node>`, `<way>`, etc.)
- balise fermante (`</node>`, `</way>`, etc.)

on les fournit en redéfinissant les méthodes d'une classe `DefaultHandler`

```
class XMLHandler extends DefaultHandler {
  @Override
  public void startElement(...) { ... }

  @Override
  public void endElement(...) { ... }
}
```

une instance sera passée à la fonction de lecture

```
  parser.parse(file, new XMLHandler());
```

lecture des sommets

```
<node id="80953646" lat="48.8582320" lon="2.2945504">
```

```
public void startElement(..., String name, Attributes a) {
  if (name.equals("node")) {
    int    id  = Integer.parseInt  (a.getValue("id" ));
    double lat = Double.parseDouble(a.getValue("lat"));
    double lon = Double.parseDouble(a.getValue("lon"));
    Vertex.create(id, lat, lon);
  } else ...
```

dans la classe `Vertex`, on fournit

```
// enregistre le sommet de numéro id
static void create(int id, double lat, double lon)
```

et

```
// retrouve le sommet de numéro id
static Vertex fromId(int id)
```

```
<way id="22815079">
  ...
```

on se donne une liste pour stocker les sommets

```
LinkedList<Vertex> way = null;
```

qu'on initialise quand on voit la balise ouvrante <way>

```
public void startElement(..., String name, Attributes a) {
  ...
  } else if (name.equals("way")) {
    way = new LinkedList<Vertex>();
  } else ...
```

(on ignore la valeur de id)

```
<way id="22815079">
  <nd ref="243494495"></nd>
  <nd ref="245446883"></nd>
  ...
```

tout sommet rencontré ensuite est mis dans cette liste

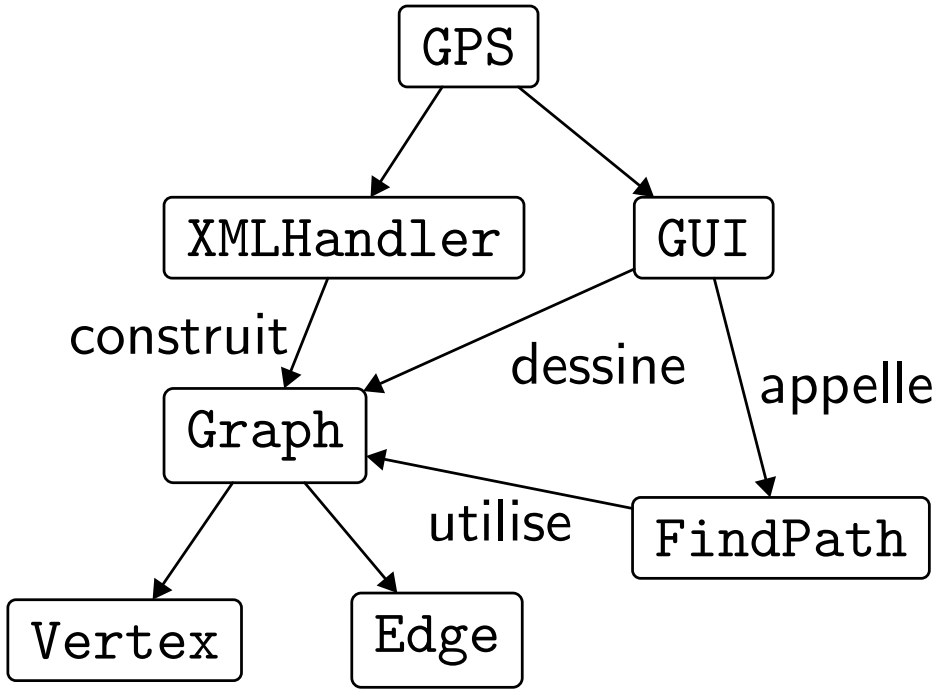
```
public void startElement(..., String name, Attributes a) {
  ...
  } else if (name.equals("nd") && way != null) {
    int ref = Integer.parseInt(a.getValue("ref"));
    way.add(Vertex.fromId(ref));
  } else ...
```

```
<way id="22815079">
  ...
</way>
```

quand on rencontre la balise fermante, on construit les arcs

```
public void endElement(..., String name) {
  if (name.equals("way") && way != null && way.size() > 1) {
    Vertex v = way.removeFirst();
    for (Vertex w: way) {
      Graph.addEdge(new Edge(v, w));
      v = w;
    }
    way = null;
  }
}
```

interface graphique


GPS
XMLHandler
GUI
construit
dessine
appelle
Graph
utilise
FindPath
Vertex
Edge

on lance l'interface graphique avec

```
new GUI()
```

où

```
class GUI extends JFrame {
  GUI() {
    this.add(new Window()); // ajoute un composant JPanel
    this.setSize(800, 600);
    ...
  }
}
```

et

```
class Window extends JPanel {
  @Override
  public void paintComponent(Graphics g) {
    ...
  }
}
```

on accède au graphe par les méthodes statiques
`Graph.vertices` et `Graph.edges`

```
public void paintComponent(Graphics g) {
  // dessiner chaque sommet
  for (Vertex p : Graph.vertices())
    drawVertex(g, p);
  // puis chaque arc
  for (List<Edge> l : Graph.edges())
    for (Edge e : l)
      drawEdge(g, e);
}
```

```
// on dessine un sommet comme un disque
void drawVertex(Graphics2D g, Vertex p) {
  g.fillOval(x(p) - 2, y(p) - 2, 4, 4);
}
```

où les méthodes `x` et `y` convertissent les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes (par exemple avec la projection Mercator)

idem pour `drawEdge`

cela convient ici, mais pas sur une carte plus grande

on pourrait organiser la carte selon un **quad tree**
et ne dessiner alors que les sous-arbres qui intersectent la fenêtre graphique

comment se programme l'**interaction** avec l'utilisateur ?

en fournissant des méthodes qui seront appelées
quand des **événements** se produisent :

- touche du clavier enfoncée, relâchée
- souris déplacée
- bouton de la souris enfoncé, relâché
- molette de la souris activée
- etc.

on donne un objet destiné à traiter les événements clavier

```
class Window extends JPanel {
  Window() {
    this.addKeyListener(new MyKeyListener());
  }
}
```

il **redéfinit** les méthodes appropriées

```
class MyKeyListener extends KeyListener {
  @Override
  public void keyTyped(KeyEvent e) {
    // réagir ici à l'événement clavier e
    ...
  }
}
```

idem pour la gestion des événements souris

```
class Window extends JPanel {
  Window() {
    ...
    this.addMouseListener(new MyMouseListener());
  }
}
```

```
class MyMouseListener extends MouseListener {
  @Override
  public void mousePressed(MouseEvent e) {
    // réagir ici à l'événement souris e
    ...
  }
}
```

ainsi on peut

- déplacer la carte en la faisant glisser
- zoomer avec la molette de la souris
- sélectionner deux points en cliquant sur la carte
- lancer un calcul de chemin en appuyant sur une touche

cf le code complet sur la page du cours

plus court chemin

on s'intéresse au problème du **plus court chemin** dans un graphe

non pas en terme de nombre d'arcs
(cf parcours en largeur au dernier amphi)

mais en fonction d'une **distance** d associée à chaque arc $u \longrightarrow v$

$$u \xrightarrow{d} v$$

cette distance peut être

- la distance euclidienne
- la distance orthodromique
- le temps de trajet en voiture, à pieds
- le coût du transport
- etc.

la longueur du chemin

$$x_0 \xrightarrow{d_1} x_1 \xrightarrow{d_2} x_2 \cdots x_{n-1} \xrightarrow{d_n} x_n$$

est la somme des distances

$$\sum_{1 \leq i \leq n} d_i$$

on note $u \xrightarrow{d}{}^{\star} v$ l'existence d'un chemin de u à v de longueur d

- on cherche les plus courts chemins à partir d'**une source** donnée
- le plus court chemin *source* $\rightarrow^\star v$ n'est pas nécessairement unique
- la distance d de chaque arc $u \xrightarrow{d} v$ est supposée **positive ou nulle**

on se donne un graphe `g`

```
Graph<V> g;
```

et une distance associée à chaque arc

```
double weight(V u, V v) { ... }
```

la méthode `weight` ne sera appelée que pour `u` et `v` tels que $u \rightarrow v$

objectif

l'objectif est de remplir une table

```
HashMap<V, Double> distance;
```

avec la longueur du plus court chemin depuis la source

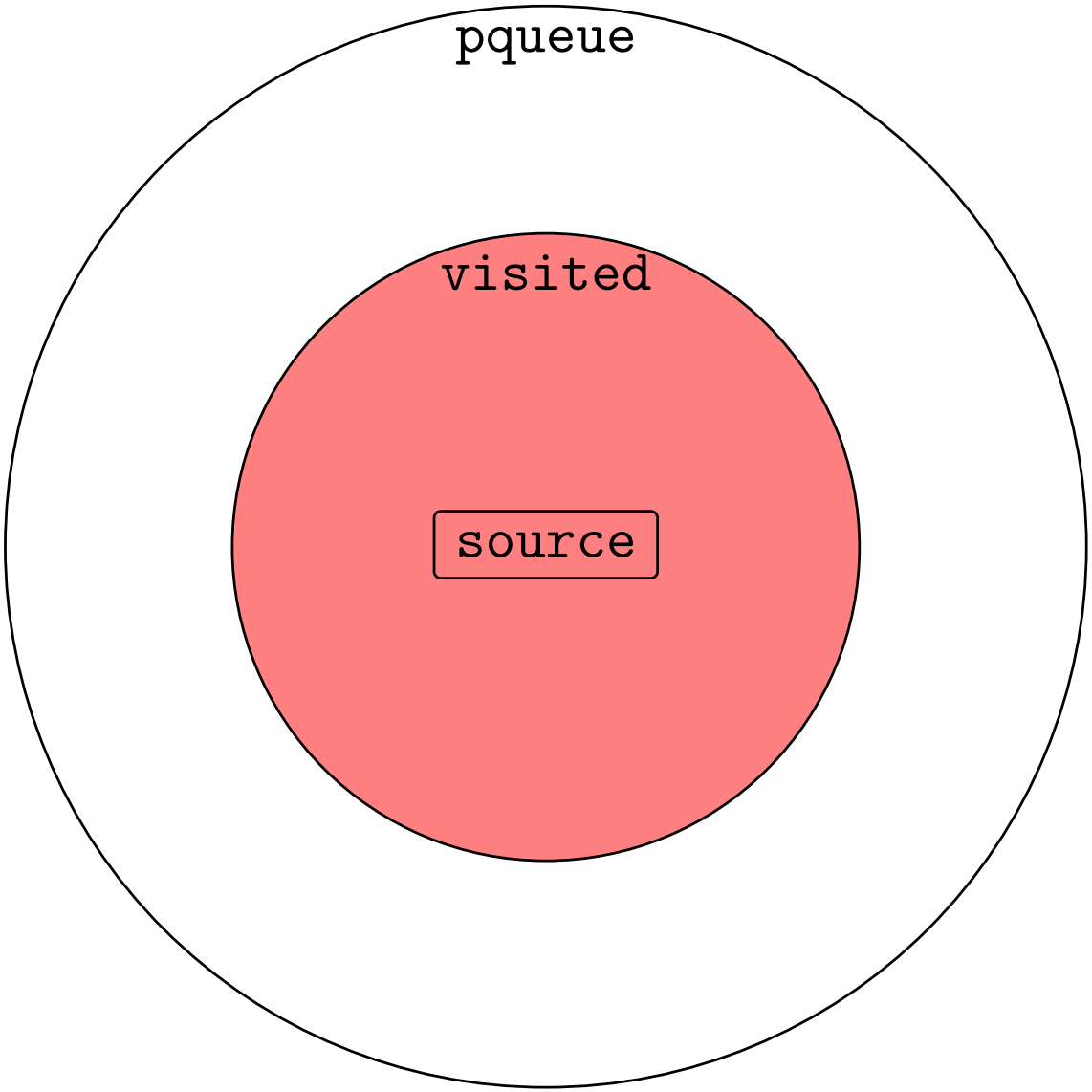
- au départ, la table `distance` est vide
- à la fin, elle contient exactement les sommets atteignables

on le fait avec la méthode

```
void shortestPaths(V source) { ... }
```

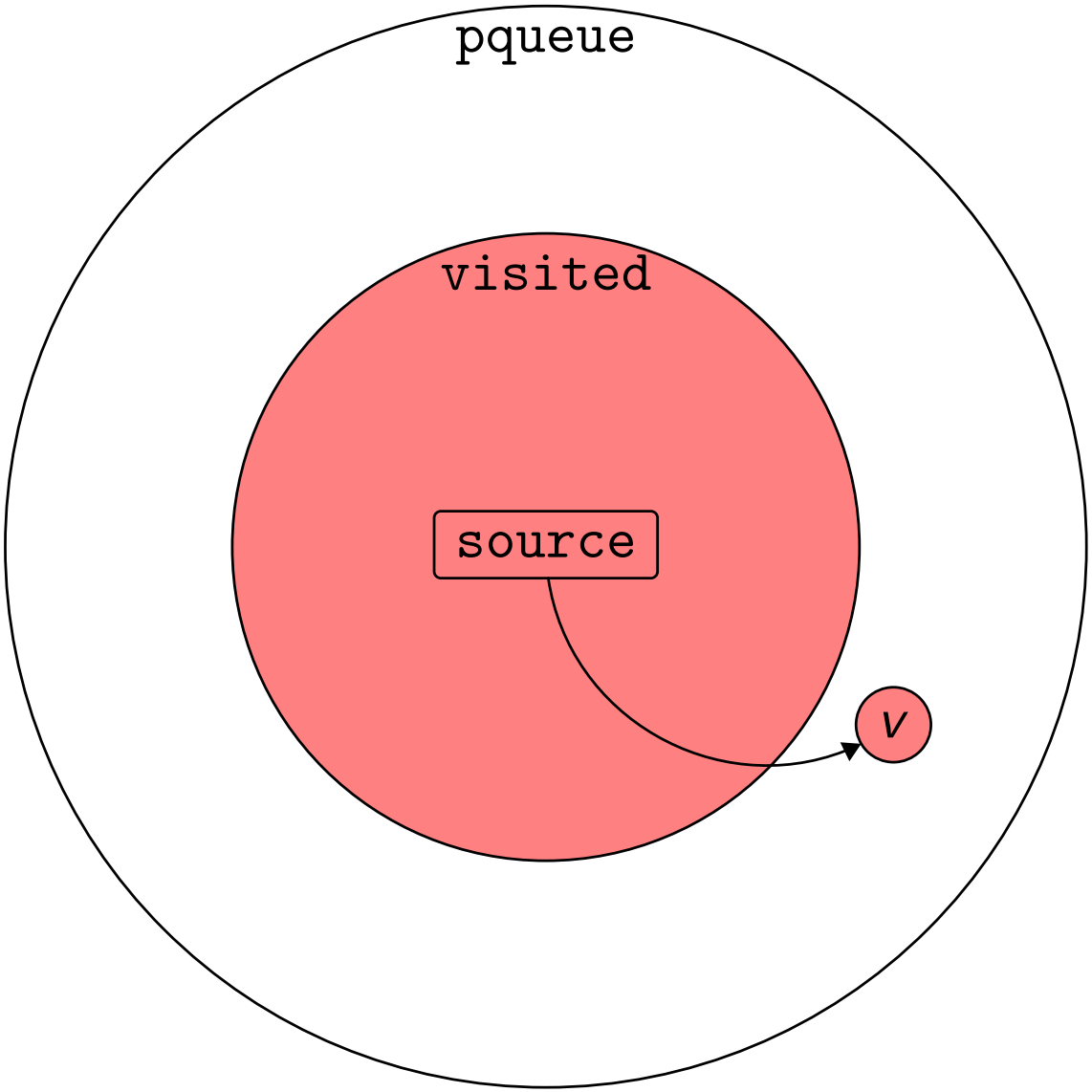
une solution à ce problème est l'**algorithme de Dijkstra** (1959)

le principe, comme pour le parcours en largeur,
consiste à découvrir les plus courts chemins
par ordre croissant de longueur



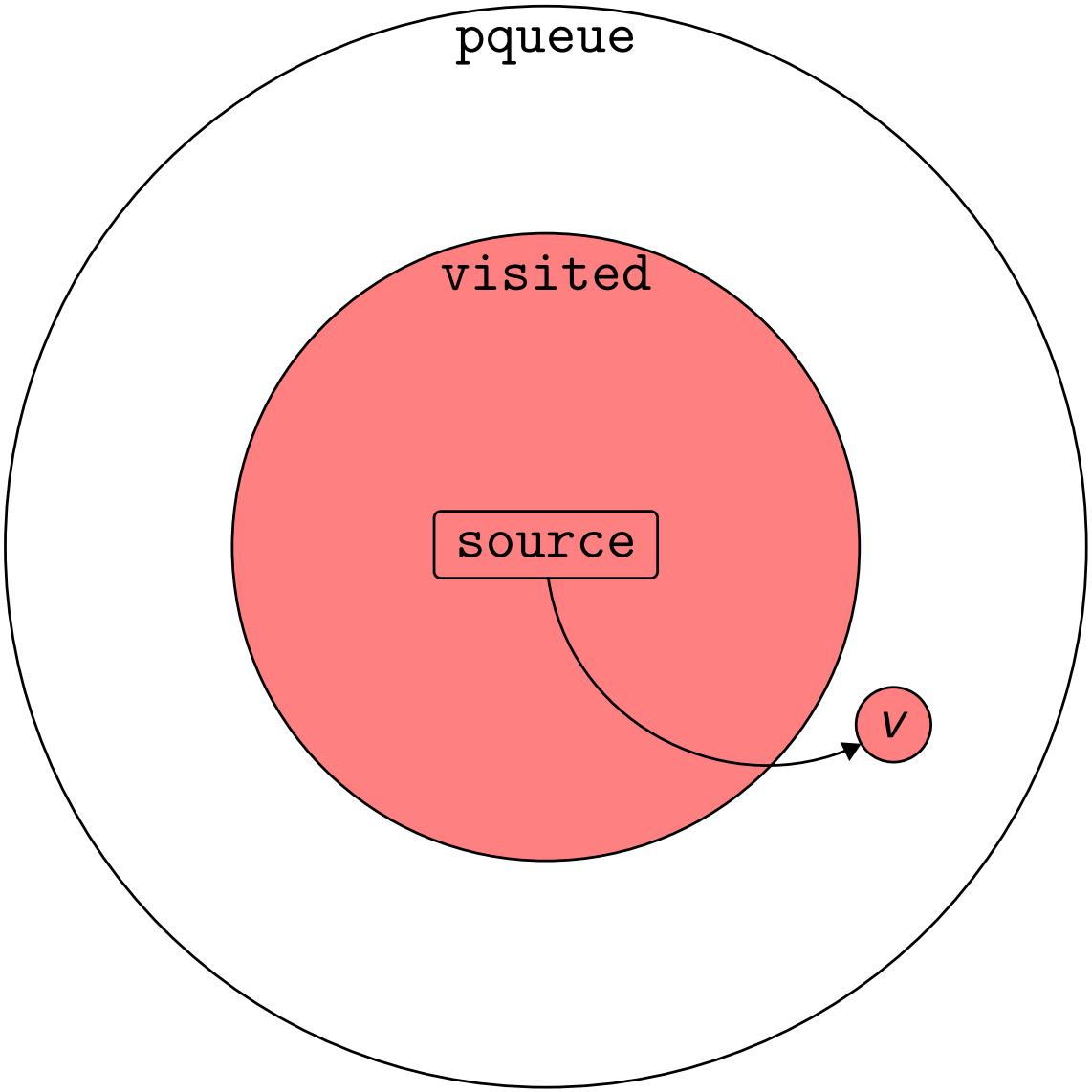
un ensemble (`visited`) contient des sommets pour lesquels on a déjà trouvé un plus court chemin

un autre (`pqueue`) contient des sommets déjà atteints



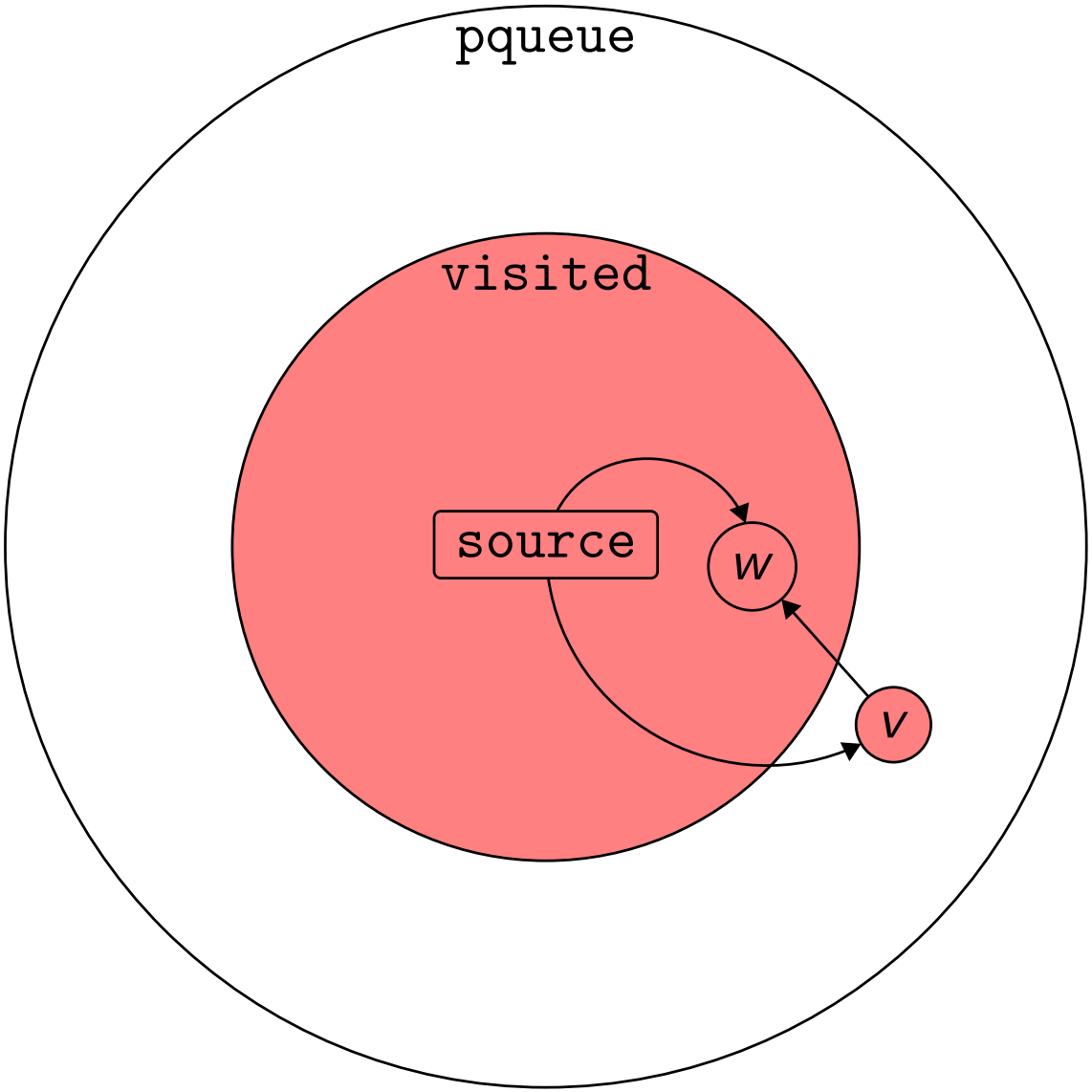
on sélectionne un sommet `v` dans `pqueue` à distance minimale de la source

il est ajouté à `visited`



on considère tous les arc $v \rightarrow w$

il y a plusieurs cas de figure

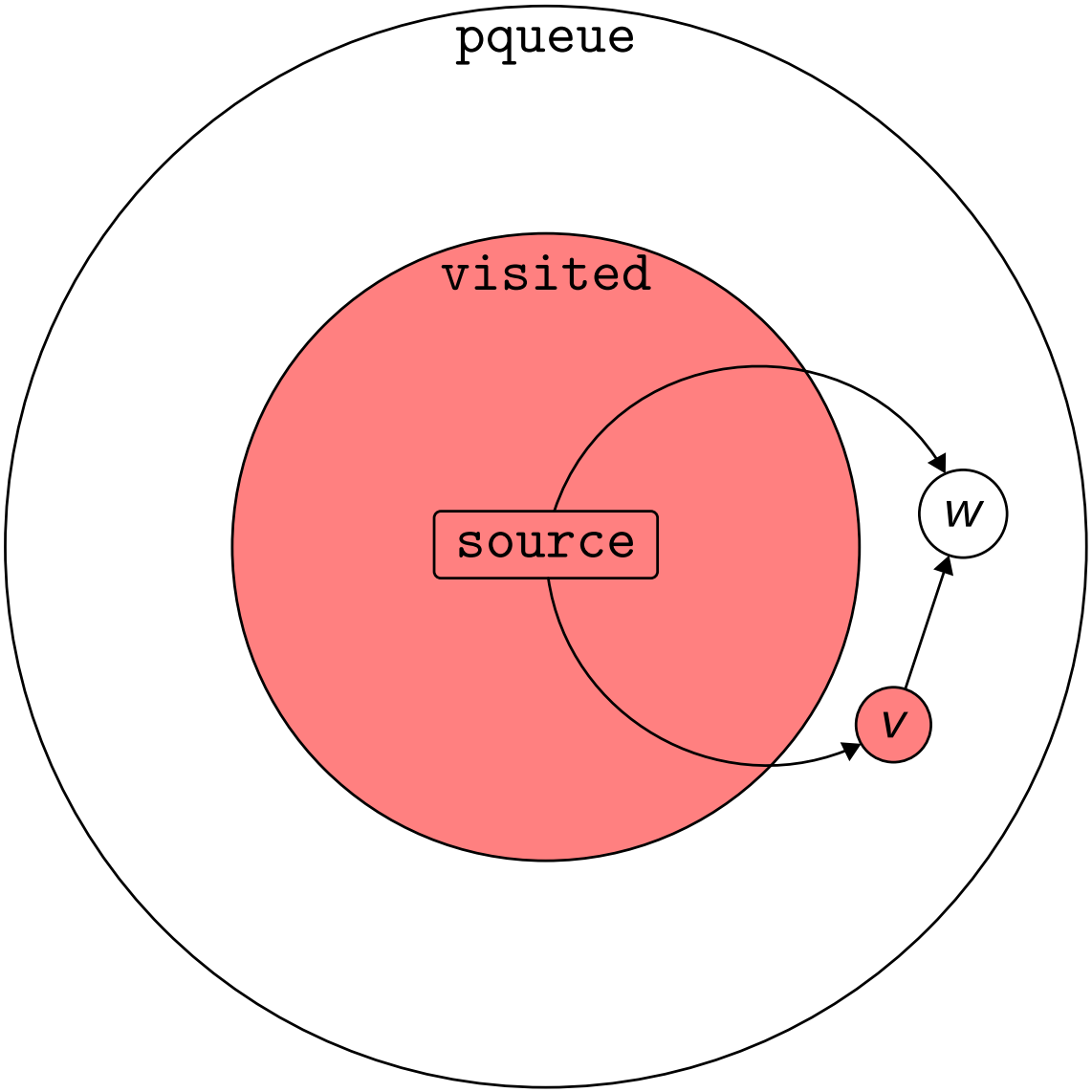


cas 1

w est déjà dans `visited`

le chemin trouvé n'est pas meilleur
(car `weight(v,w)` ≥ 0)

il est ignoré



w est dans pqueue

cas 2

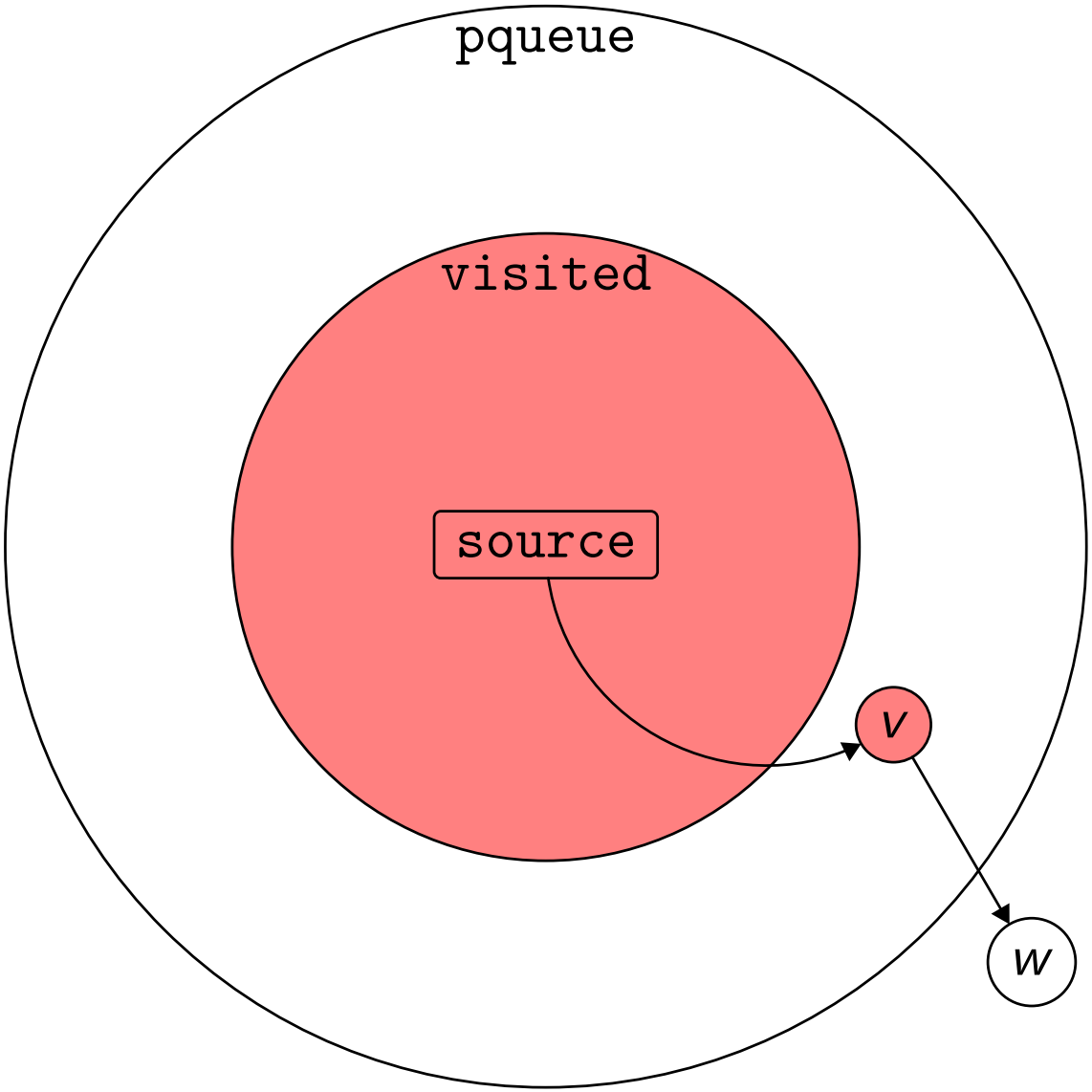
le chemin trouvé n'est pas amélioré

il est ignoré

cas 3

le chemin trouvé est plus court

la distance de w est mise à jour



cas 4

w n'est pas dans pqueue

on vient de découvrir un premier chemin menant à w

w est ajouté à pqueue

les sommets pour lesquels on a déjà trouvé le plus court chemin

```
HashSet<V> visited = new HashSet<V>();
```

une **file de priorité** (cf amphi 7) contient des sommets déjà atteints avec leur distance à la source

```
PriorityQueue<Node<V>> pqueue = new PriorityQueue<>();
```

la priorité est la distance

un sommet et sa distance à la source

```
class Node<V> implements Comparable<Node<V>> {

  final V      node;
  final double dist;

  Node(V node, double dist) {
    this.node = node;
    this.dist = dist;
  }

  @Override
  public int compareTo(Node<V> that) {
    return Double.compare(this.dist, that.dist);
  }
}
```

la source est à distance 0 d'elle-même

```
distance.put(source, 0.);
```

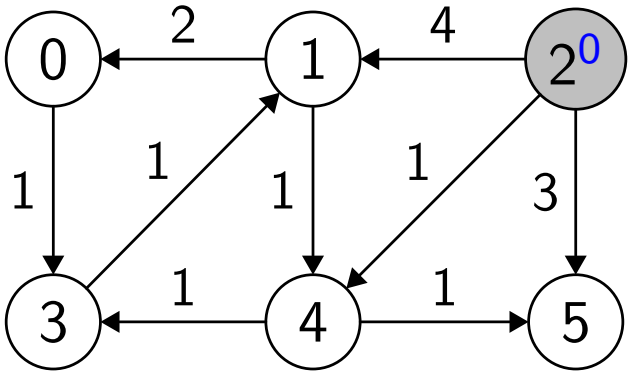
on la met dans la file de priorité avec cette distance

```
pqueue.add(new Node<V>(source, 0.));
```

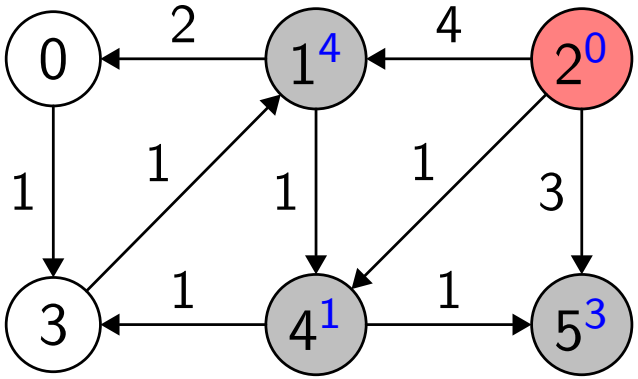
boucle

```
while (!pqueue.isEmpty()) {
  Node<V> n = pqueue.poll();
  // ne rien faire si on a déjà trouvé le plus court chemin
  if (visited.contains(n.node)) continue;
  // on vient de trouver le plus court chemin pour n.node
  visited.add(n.node);
  for (V w: g.successors(n.node)) {
    double d = n.dist + weight(n.node, w);
    // est-ce mieux d'emprunter n.node -> w ?
    if (!distance.containsKey(w) || d < distance.get(w)) {
      distance.put(w, d);
      pqueue.add(new Node<V>(w, d));
    }
  }
}
```

exemple

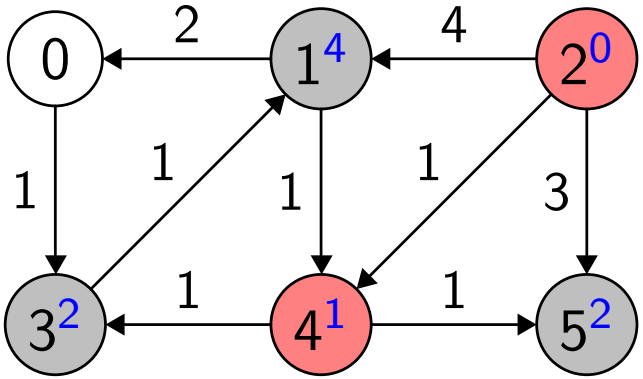


visited	pqueue
	2^0

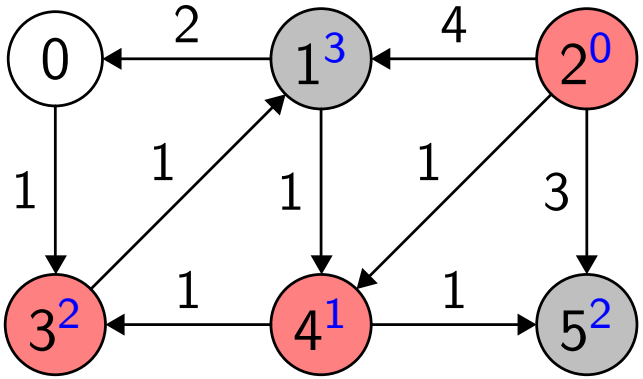


visited	pqueue
2	
	4^1
	1^4
	5^3

exemple

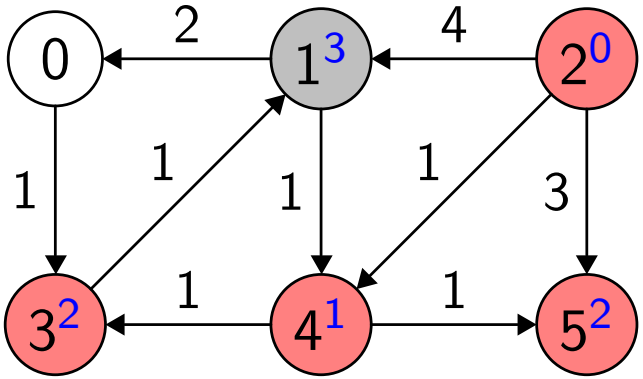


visited	pqueue
2	
4	
	1^4
	5^3
	3^2
	5^2

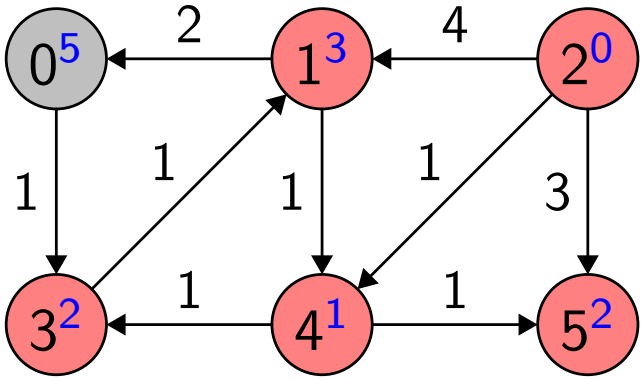


visited	pqueue
2	
4	
3	1^4
	5^3
	5^2
	1^3

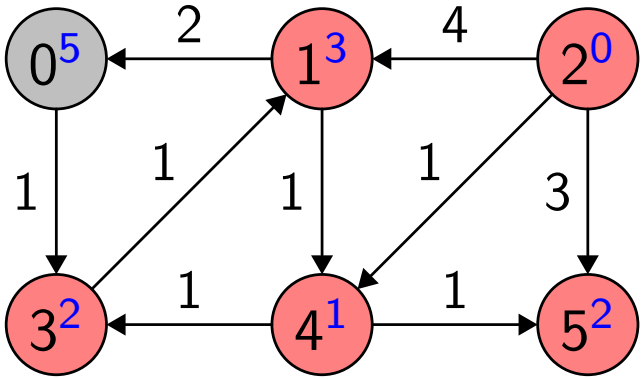
exemple



visited	pqueue
2	
4	
3	1^4
5	5^3
	1^3

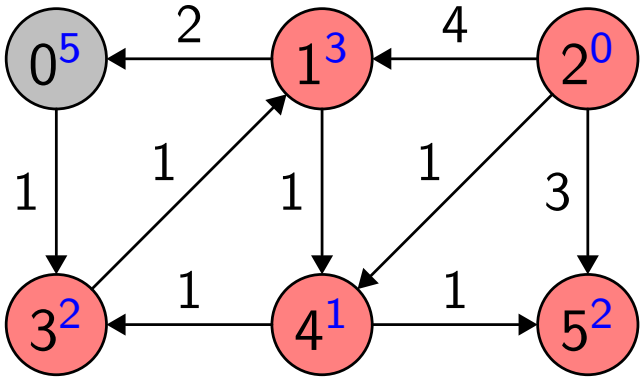


visited	pqueue
2	
4	
3	1^4
5	5^3
1	
	0^5

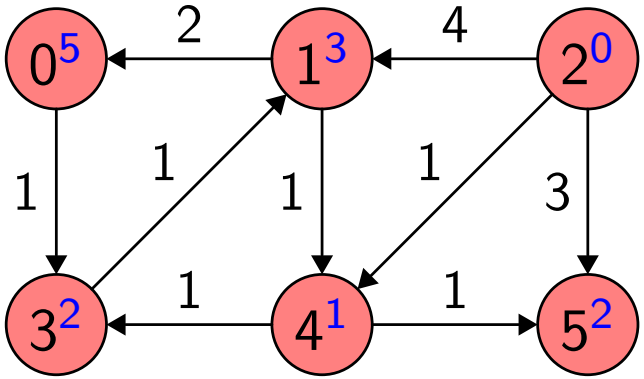


visited	pqueue
2	
4	
3	1^4
5	
1	
	0^5

exemple



visited	pqueue
2	
4	
3	
5	
1	
	0^5



visited	pqueue
2	
4	
3	
5	
1	
0	

si on souhaite **construire** le plus court chemin trouvé
on procède comme pour DFS et BFS (cf amphi 9) :

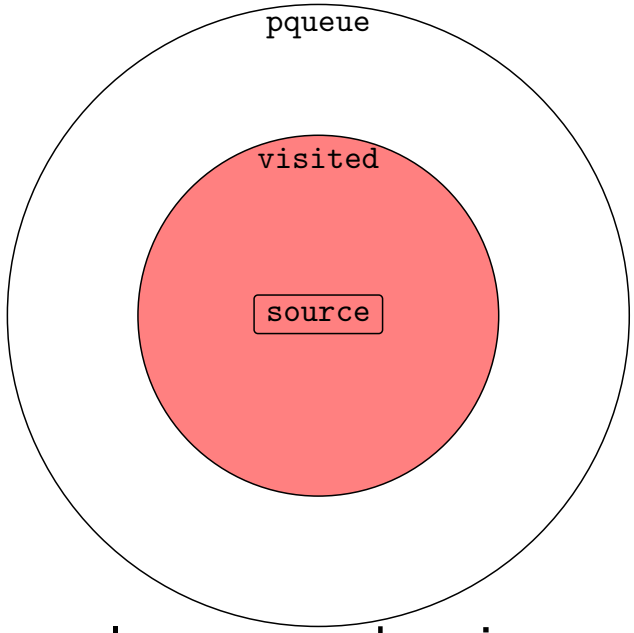
une table supplémentaire donne, pour chaque sommet v,
un arc $u \rightarrow v$ qui permet de l'atteindre dans un chemin optimal

montrons la **correction** de cet algorithme

c'est-à-dire, qu'à la fin de la boucle `while`,

- `visited` contient exactement les sommets atteignables
- `distance` donne la longueur d'un plus court chemin

on le fait en établissement des **invariants de boucle**
c'est-à-dire des propriétés vraies à chaque tour de boucle



(1) $\texttt{source} \in \texttt{visited} \cup \texttt{pqueue}$

(2) $\texttt{distance}[\texttt{source}] = 0$

(3) $\forall v \in \texttt{visited} \cup \texttt{pqueue}$,
$\texttt{source} \xrightarrow{\texttt{distance}[v]}{}^{\star} v$

(4) $\forall v \in \texttt{visited}$,
$\texttt{distance}[v]$ est la longueur d'un plus court chemin

(5) $\forall v \in \texttt{visited}$, $\forall w$ t.q. $v \xrightarrow{d} w$,
$w \in \texttt{visited} \cup \texttt{pqueue}$
et $\texttt{distance}[w] \leq \texttt{distance}[v] + d$

(6) $\forall v$, si $\texttt{source} \xrightarrow{d}{}^{\star} v$ et $d < \min(\texttt{pqueue})$
alors $v \in \texttt{visited}$

on prouve que ces invariants

- sont vrais avant la boucle `while`
  (lorsque `visited` $= \emptyset$ et `pqueue` $= \{$`source`$\}$)

- sont préservés par toute itération de la boucle `while`

en particulier, ces invariants seront vrais à la sortie de la boucle,
lorsque `pqueue` $= \emptyset$

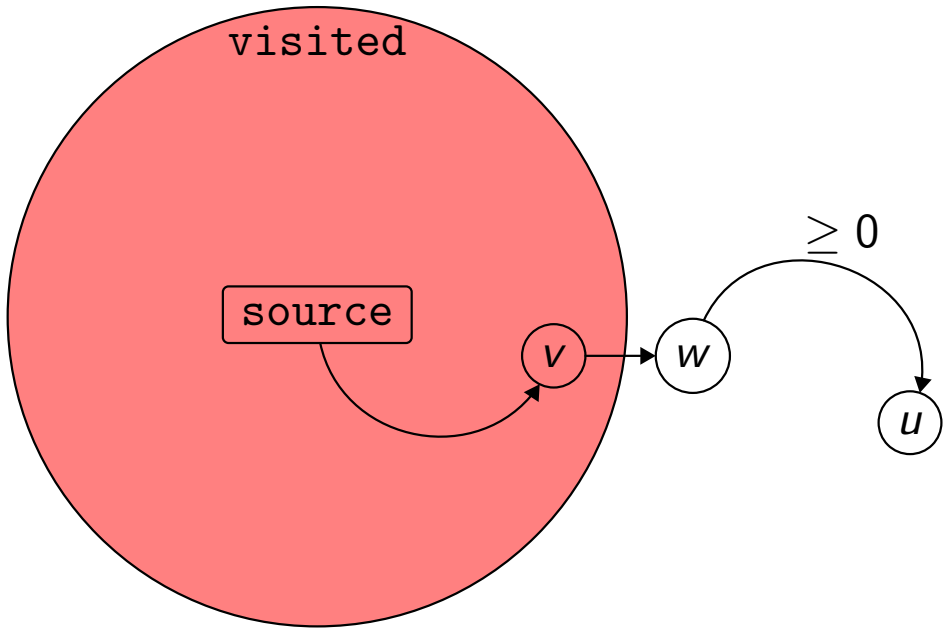
Invariant (4)

$\forall u \in$ `visited`, `distance`$[u]$ est la longueur d'un plus court chemin

considérons l'instant où `distance`$[u]$ est fixée, c'est-à-dire quand u sort de la file

un chemin `source` $\rightarrow^\star u$ strictement plus court sortirait de `visited` par $v \rightarrow w$

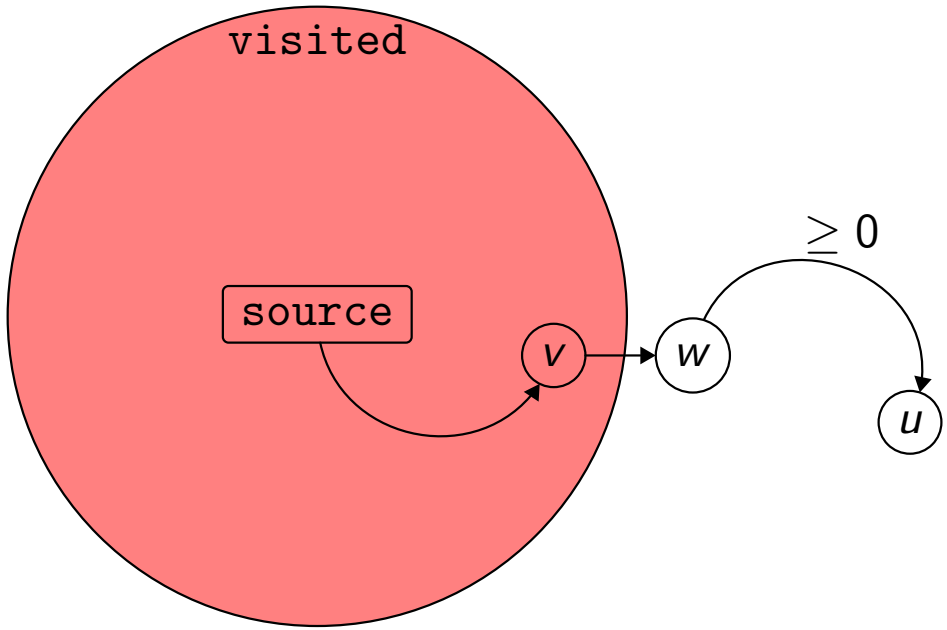
mais alors on aurait `distance`$[w] <$ `distance`$[u]$ ce qui contredit le choix de u



Propriété

à la fin, `visited` contient exactement les sommets atteignables

- (3) garantit que les sommets de `visited` sont atteignables
- si u est atteignable et n'est pas dans `visited`, le premier arc sortant de `visited` $v \to w$ contredit (5)



- en **temps**

  chaque arc est examiné au plus une fois

  dans le pire des cas, chaque arc examiné entraîne une insertion dans la file $\Rightarrow E$ tours de boucle

  chaque tour de boucle est dominé par le coût de la file de priorité, qui est au pire $O(\log E)$ c'est-à-dire $O(\log V)$ car $E \leq V^2$

  d'où un total $O(E \log V)$

- en **espace**

  clairement $O(E)$ dans le pire des cas

non, car il existe une structure de file de priorité
où la priorité d'un élément peut être modifiée en temps constant
(tas de Fibonacci)

on a alors

- V insertions/suppressions dans la file $\Rightarrow O(V \log V)$
- E modifications de priorité $\Rightarrow O(E)$

d'où un total $O(V \log V + E)$

mais **en pratique** la solution en $O(E \log V)$
est tout à fait satisfaisante

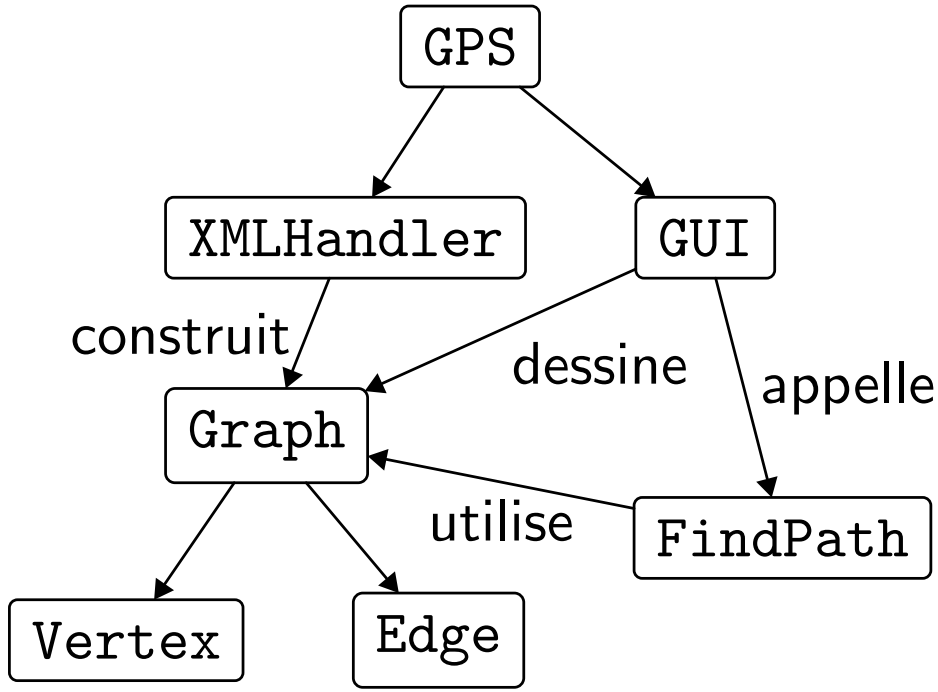
prenons deux points sur la carte, pour lesquels il existe un chemin

parcours en largeur	algorithme de Dijkstra

`...`
`103 arcs`
`distance totale = 10.90 km`
	`...`
	`132 arcs`
	`distance totale = 8.76 km`

nombre d'arcs minimal	distance minimale

```
  30 GPS.java
  64 XMLHandler.java
  50 Vertex.java
  26 Edge.java
  58 Graph.java
 103 FindPath.java
  17 VertexDist.java
 248 GUI.java
 ------------------
 596 total
```



si la distance associée à chaque arc est la même,
alors l'algorithme de Dijkstra est inutile :
un simple parcours en largeur suffit (cf amphi 9)

rappel : on a supposé les distances positives ou nulles

pour des distances possiblement négatives, on peut utiliser l'**algorithme de Bellman-Ford**

- détecte tout cycle de longueur strictement négative atteignable depuis la source, le cas échéant (i.e., pas de plus court chemin)
- sinon, détermine la longueur d'un plus court chemin pour tous les sommets atteignables (comme l'algorithme de Dijkstra)

version **bidirectionnelle**
de l'algorithme de Dijkstra

dans les rues de New-York

- **lire le poly**, chapitre
  16.2 plus court chemin

  il y a des **exercices** dans le poly

- CC le **mercredi 13 novembre** 9h–12h
  - documents autorisés : polycopié, notes personnelles
  - dictionnaire autorisé pour les élèves étrangers

  - sujets et corrigés des années précédentes sur la page du cours

que retenir de ce cours ?

- **l'ordre n'importe pas**

	insertion	suppression	
table de hachage	$O(1)$	$O(1)$	(amorti)

- **l'ordre importe**

	insertion	suppression
arbre binaire de recherche	$O(\log N)$	$O(\log N)$
file de priorité	$O(\log N)$	$O(\log N)$

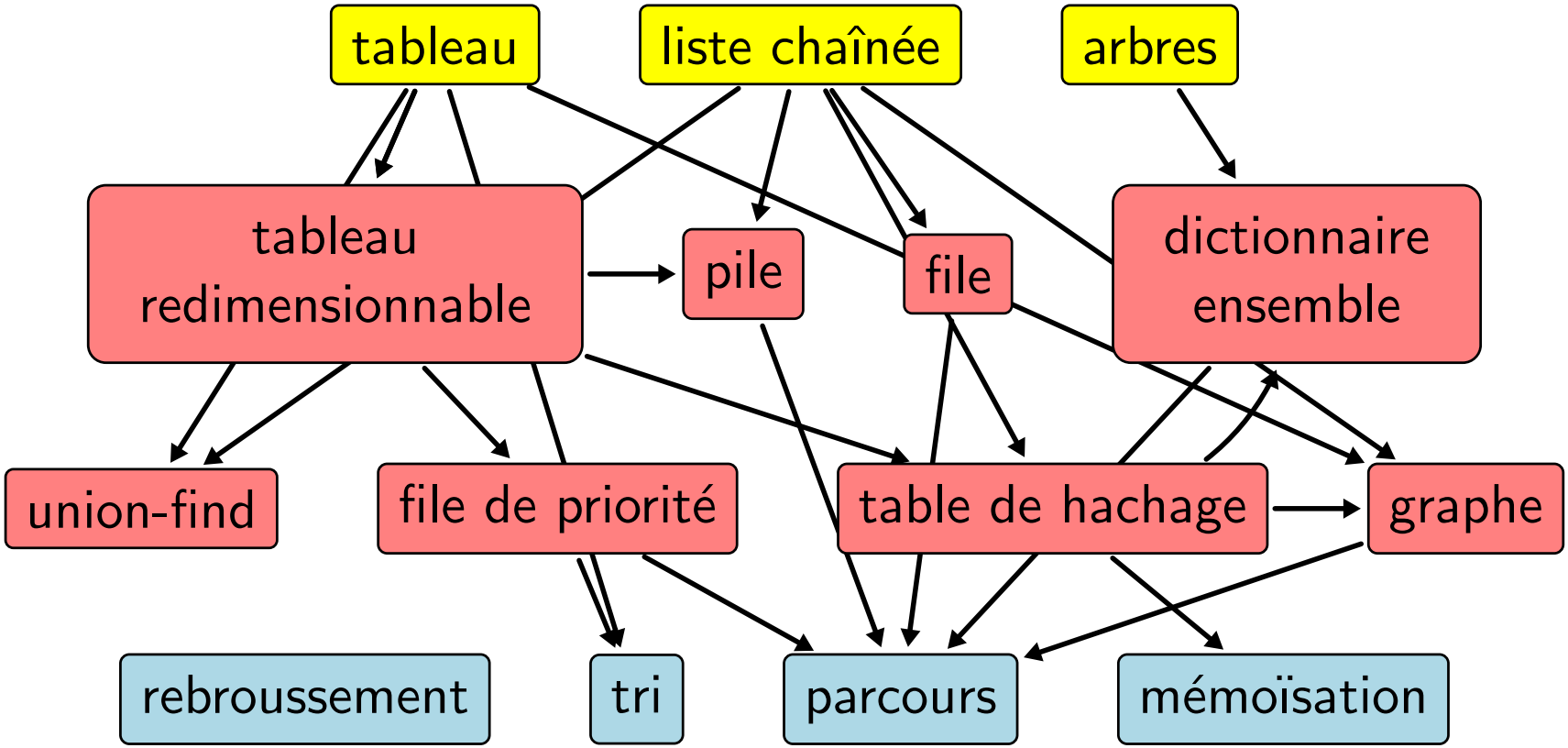
- **mémoïser**, c'est ne pas calculer deux fois la même chose

- **trier** N valeurs par comparaisons
  ne peut pas être fait en moins que $O(N \log N)$

  le tri par tas (*heapsort*) est optimal, en temps et en espace
  le tri fusion (*mergesort*) est optimal en temps et stable

- on peut **parcourir un graphe** de V sommets et E arcs,
  à partir d'un sommet donné,
  en temps $O(V + E)$ et en espace $O(V)$, ce qui est optimal

les briques de base sont peu nombreuses



beaucoup de données librement accessibles,
utiles pour vos projets

- projet Gutenberg
  plus de 60 000 livres sur `https://www.gutenberg.org/`
- Wikipedia
  `https://dumps.wikimedia.org/`
- OpenStreetMap
  `https://openstreetmap.fr/`
- mais aussi `www.ined.fr`, `www.data.gouv.fr`, etc.

si vous voulez tout savoir sur la manière dont les langages de programmation et les compilateurs sont faits, le cours

CSC_52064 **Compilation**

est fait pour vous

en particulier, vous écrirez un compilateur optimisant pour un fragment du langage C vers l'assembleur x86-64

bonne continuation à toutes et à tous,
avec ou sans informatique